ACADÉMIE
DE CLERMONT-FERRAND

Liberté
Égalité
Fraternité

Didacticothèque de mathématiques

Novembre 2024

Didacticothèque de mathématiques

Document conçu par **Estelle Rodrigues**, référente mathématiques de la circonscription
de Chamalières, Puy-de-Dôme.
Sous le pilotage de **Marie-Gabrielle Vachette**, IEN de la circonscription de Chamalières.

Avec la collaboration des groupes référents mathématiques 1er et 2d degrés du Puy-de-Dôme,
des professeurs des écoles de la circonscription de Chamalières et des professeurs de mathématiques
des collèges de Bourg Lastic, La Tour d'Auvergne, Rochefort-Montagne et Murat le Quaire.

Mise en page : service communication du rectorat.
Impression : service reprographie du rectorat – 280 exemplaires
Novembre 2024

Sommaire

FICHE 1
Résoudre des problèmes

Progression

Attendus de fin de maternelle

- Utiliser le nombre pour exprimer la position d'un objet ou d'une personne dans un jeu dans une situation organisée, sur un rang ou pour comparer des positions.
- Commencer à résoudre des problèmes de compositions de deux collections, d'ajout ou de retrait, de produit ou de partage (les nombres en jeu sont tous inférieurs ou égaux à 10).

Attendus de fin de cycle 2

- Résoudre des problèmes du champ additif et/ou multiplicatif en une, deux ou trois étapes
- Modéliser ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écritures mathématiques.
- Connaître le sens des signes –, +, x et :
- Résoudre des problèmes de partage et de groupement (ceux où l'on cherche combien de fois une grandeur contient une autre grandeur, ceux où l'on partage une grandeur en un nombre donné de grandeurs).

Attendus de fin de cycle 3

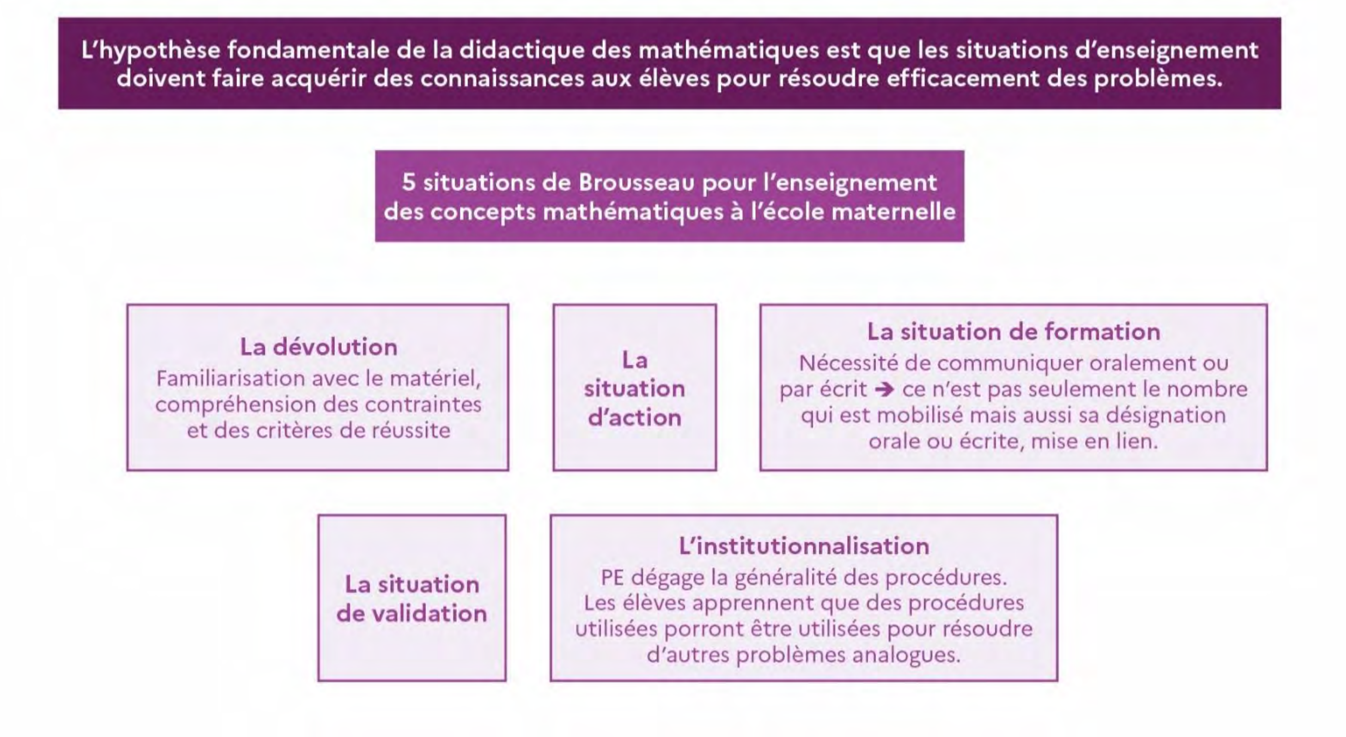
- Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux).

Socle commun de connaissances et de compétences

- Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne (domaines 1, 2, 4).
- Reconnaitre et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité (domaines 1, 2, 4).
- Résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement (domaines 2, 3, 4).
- Utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages, etc. (domaines 1, 5).

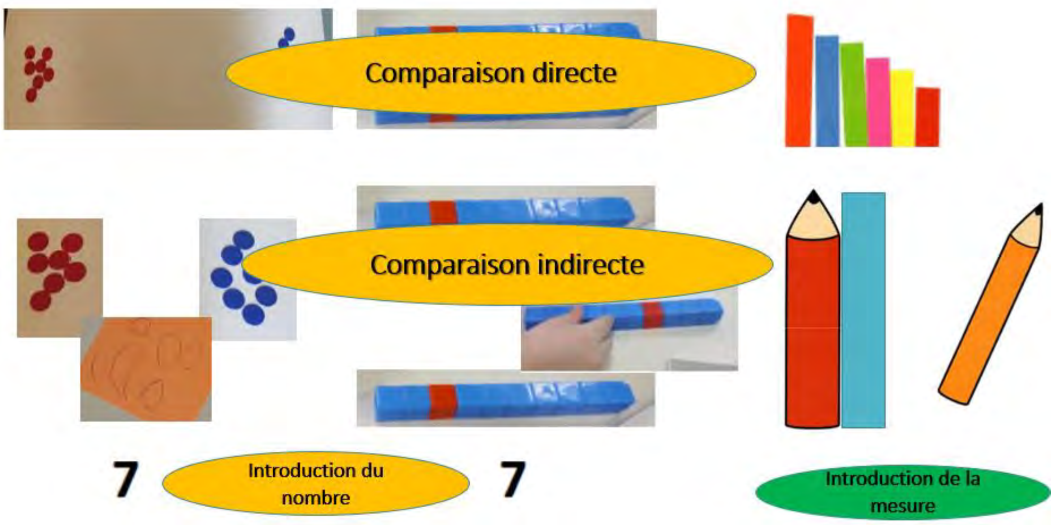
Didactique

Théorie des situations de Brousseau



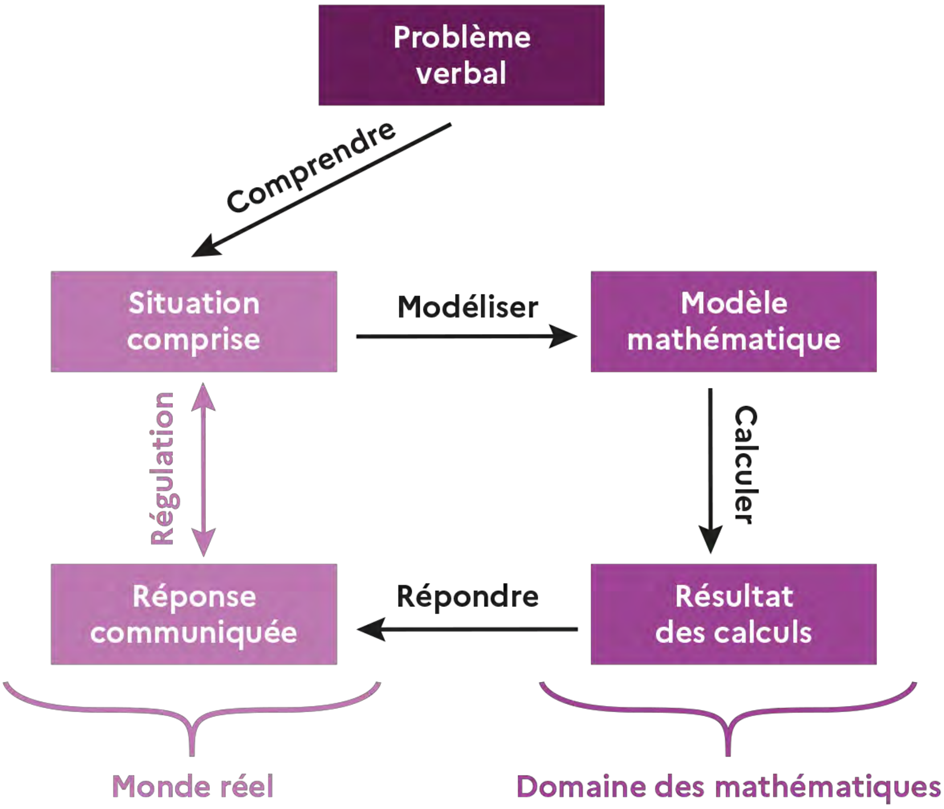
La théorie des situations de Brousseau distingue des situations d'action et des situations de formulation pour lesquelles l'enseignant va empêcher la manipulation, contraindre la situation en éloignant dans l'espace ou le temps pour amener les élèves à utiliser une nouvelle stratégie pour garder trace ou produire un message à l'écrit ou à l'oral.

L'élève souhaite garder mémoire de la quantité d'une collection d'oursons la même collection avec la même quantité d'oursons le lendemain.
Il associe chaque ourson à un petit cercle sur sa feuille.



La comparaison directe de quantités, de positions ou de grandeurs constitue des situations d'action pour lesquelles l'élève ne rencontre pas de problème. L'enseignant va jouer sur les variables didactiques pour éloigner la collection, éloigner la suite ou encore éloigner les objets pour lesquels on veut comparer une grandeur afin de placer les élèves face à une situation problème et engager l'émergence d'une stratégie de résolution. On confronte alors les élèves à des situations de formulation. Elles permettront une abstraction des concepts en jeu et la construction de ces derniers comme le nombre représentant une quantité, une position ou encore l'émergence du concept de grandeurs.

Que signifie « résoudre un problème » ?



Guide « Résolution de problèmes » Cours Moyen.

Jean Julo distingue la phase où l'élève se représente le problème de la phase de calcul :

Pour pouvoir aider les élèves à se représenter le problème, il faut analyser le processus de représentation du problème.

Jean Julo (*Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, Presses Universitaires de Rennes-1995) décrit trois (sous) processus en jeu quand on résout un problème.

Interprétation et sélection

L'élève est face à un contexte sémantique, qu'il doit interpréter, ce qu'il fait, guidé par les connaissances qu'il a à un moment donné. Il serait faux de penser, d'après lui, que les informations dont l'élève a besoin pour résoudre le problème sont là, bien visibles…

Considérons les quatre énoncés suivants de Catherine Houdement :

Calculer le nombre de tulipes dans :

- un massif de fleurs, formés de 60 tulipes rouges et 15 tulipes jaunes,
- un massif de 60 rangées de 15 tulipes,
- un massif de 60 fleurs, formé de tulipes et de 15 jonquilles,
- un massif, sachant que 60 tulipes sont disposées en 15 massifs identiques.

Ces problèmes se ressemblent : même contexte, mêmes valeurs numériques, même question.
Comment arrivons-nous à les discerner quant au traitement à mener pour arriver à la solution ?
Jean Julo nous dit que nous interprétons le contexte sémantique et nous lui associons spontanément une opération car nous avons les connaissances qui ont créé cette association, nous avons construit des associations entre contexte et opération numériques, associations que Julo nomme « schémas de problèmes ».

Structuration

La représentation d'un problème ne se construit pas de façon juxtaposée, mais elle forme un tout cohérent qui se structure. Ainsi, les élèves restent parfois bloqués dans la résolution d'un problème parce qu'ils n'envisagent pas de sortir du cadre qu'ils se sont fixé et qui pourtant n'est pas efficace.

Opérationnalisation

C'est le processus qui permet le passage à l'action effective (calculs, tracés, etc.) ou mentale (raisonnement, etc.). Ce processus résulte de la mise en œuvre de connaissances opératoires, issues de nos expériences passées.

Le fait de pouvoir agir ou non sur les objets (les déplacer ou non) constitue une première étape vers une manipulation mentale et provoque la nécessité d'anticiper la réponse lorsque les objets sont absents ou éloignés. Ces situations feront l'objet d'une reprise à l'entrée du CP.
Les situations d'apprentissage liées à la résolution de problèmes seront répétées autant que nécessaire ; elles contribueront à constituer une première mémoire de problèmes et à installer une culture scolaire de la résolution de problèmes. Il s'agit donc de penser cette articulation entre école maternelle et CP.

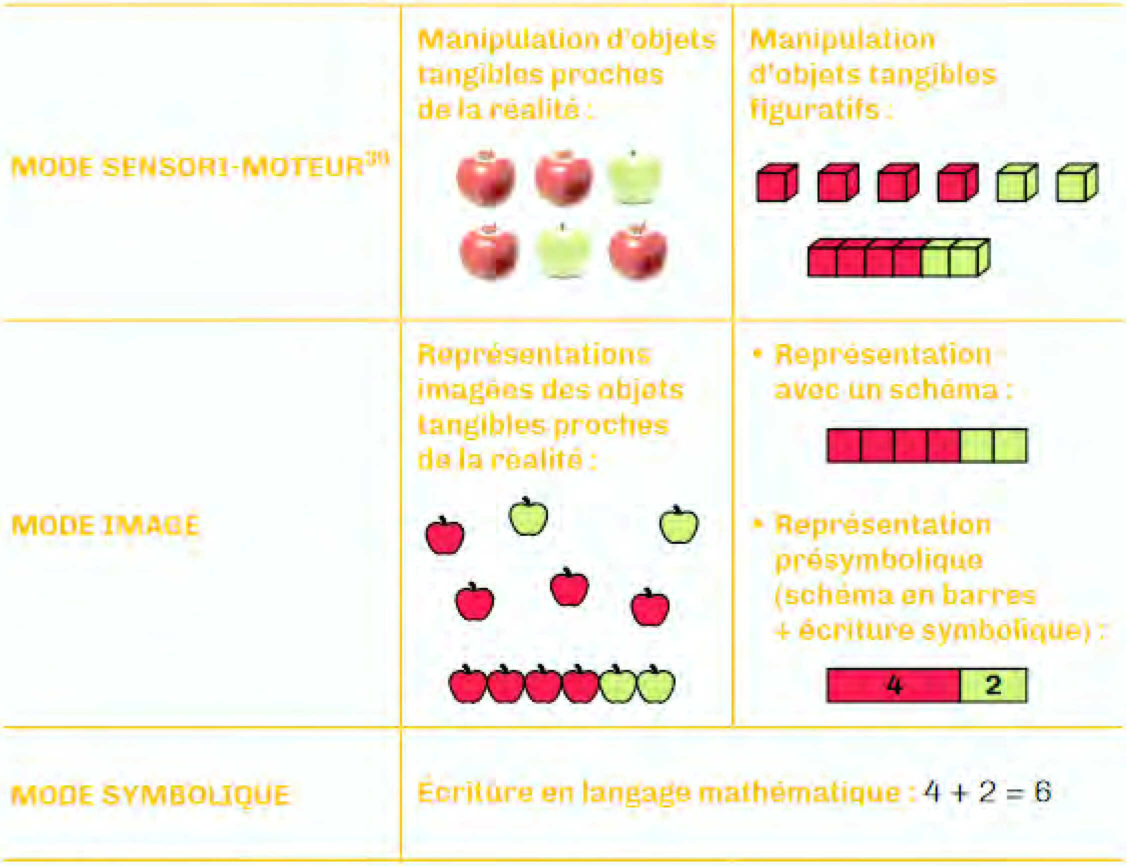


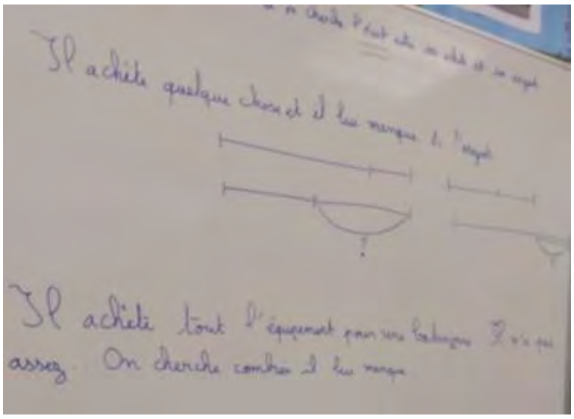
Figure 19. Progression des représentations.

Guide *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*

Ces travaux avec un matériel sont progressivement remplacés par une activité plus abstraite consistant à imaginer ces manipulations en construisant des schémas avec des représentations imagées des cubes et des barres de 10 cubes.

Tous les matériels ne sont pas équivalents quant aux représentations schématiques qu'ils peuvent générer et aux calculs et stratégies qui peuvent être développés à partir de ces représentations. Les cubes emboîtables, le matériel multibase, les réglettes sont des éléments intéressants pour convoquer les aspects additifs, les propriétés de décomposition des nombres ou le sens des opérations. Ils sont des supports utiles pour des représentations qui contribuent à la modélisation.

La représentation de l'énoncé sous la forme d'un schéma doit permettre aux élèves de mieux comprendre le sens des données chiffrées.

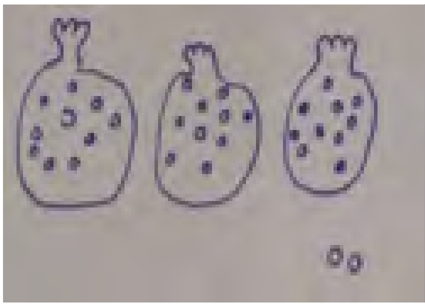
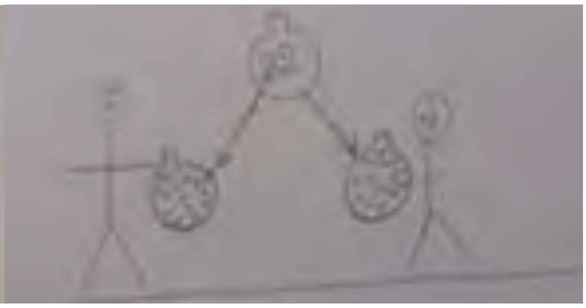


Exemple de représentation et de reformulation d'un problème par des élèves de CM1 après leur avoir demandé de raconter le problème sans les données numériques. Cette consigne amène les élèves à se centrer sur l'identification de la structure mathématique sous-jacente en faisant abstraction des nombres .

Introduction du modèle en barres

Pour résoudre efficacement les problèmes arithmétiques, la modélisation joue un rôle important. Cependant, il convient de faire une distinction entre « représentation » et « modélisation ».

Représenter, c'est traduire par un dessin, un schéma la situation. Certaines représentations (souvent de type pictural) ne sont pas traduisibles par un calcul.

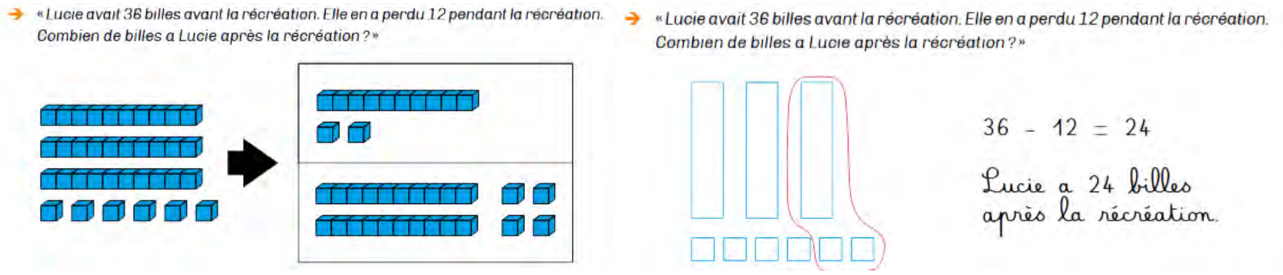



Modéliser, c'est traduire mathématiquement la situation. La modélisation amène ensuite à la procédure de calcul ; elle rend la réalité calculable. Il s'agit d'un processus qui peut prendre appui sur diverses représentations.

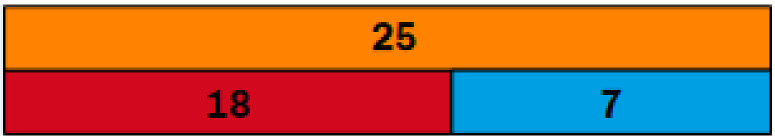
Le triptyque « manipuler, verbaliser, abstraire » offre des repères pour concevoir l'enseignement de la résolution de problèmes. L'articulation entre matériel, représentations associées et les notions mathématiques convoquées est essentielle. Il convient donc à ce titre de privilégier dès le CP des matériels décontextualisés tels que les cubes emboitables.

L'appui dès le CP sur des représentations à l'aide de schémas (notamment des schémas en barres) pourra faciliter l'accès à la modélisation et préparer un continuum didactique du cycle 2 au cycle 3 pour l'enseignement de la résolution de problèmes.

Les élèves pourront manipuler des cubes représentant les objets en jeu dans le problème. Ce travail avec un matériel sera progressivement remplacé par une activité plus abstraite consistant à imaginer ces manipulations en construisant des schémas avec des représentations imagées des cubes. En fin de CP mais surtout en CE1, les élèves pourront ne plus faire ce genre de schémas lorsque la modélisation et le calcul à effectuer leur seront plus accessibles. Ils pourront remplacer le schéma par une modélisation en barres. Toutefois, il est nécessaire que la progressivité de la construction de schémas soit pensée et harmonisée du cycle 2 au cycle 3. Ce type de schéma en barres va notamment aider les élèves à reconnaitre les structures mathématiques des problèmes, les opérations et procédures sous-jacentes grâce à l'analogie visuelle entre les représentations schématiques utilisées.



Guide *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*



Un grand avantage de cette modélisation réside dans le fait que les problèmes basiques peuvent ainsi prendre la même forme schématique et correspondre au même « modèle ». Par exemple, les quatre problèmes suivants se ramènent au même type de schéma.

1. *Léo et Lucie ont 43 billes à eux deux. Léo a 6 billes. Combien Lucie a-t-elle de billes ?*

2. *Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 6 billes pendant la récréation. Combien a-t-elle de billes maintenant ?*

3. *Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 37 billes pendant la récréation. Combien a-t-elle de billes maintenant ?*

4. *Lucie a gagné 6 billes à la récréation. Maintenant elle a 43 billes. Combien de billes avait-elle avant la récréation ?*

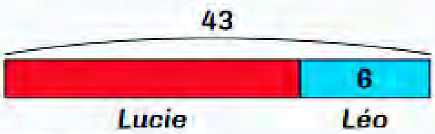


Figure 32. Problème 1.

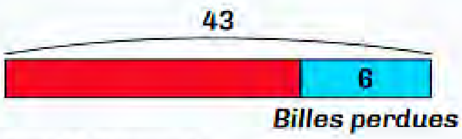


Figure 33. Problème 2.

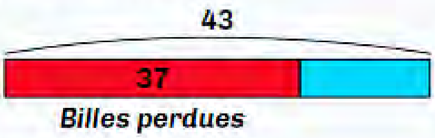


Figure 34. Problème 3.

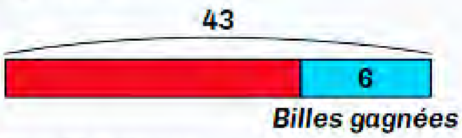
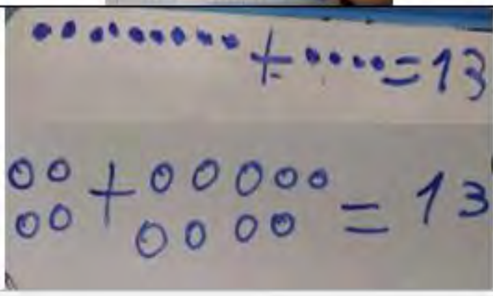


Figure 35. Problème 4.

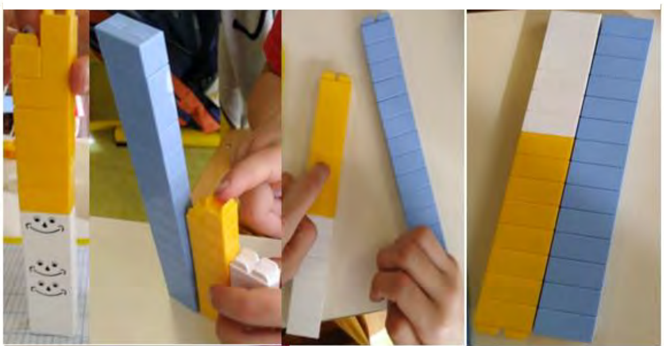
Guide *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP.*

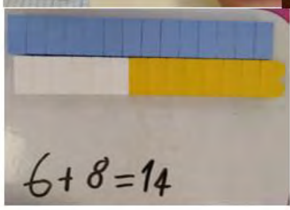
Un exemple d'introduction du schéma en barres au CP testée en constellation (secteur collège de Rochefort Montagne, 2021)

Consigne donnée : « Paul a 4 billes. Il en gagne 9. Combien en a-t-il en tout ?
On ne fait pas de la lecture. Qu'est-ce qu'on veut savoir ? Combien en a-t-il en tout ? Il en gagne. On veut savoir combien il en a en plus maintenant. Il faudra expliquer aux autres comment vous allez trouver ».

Représentation de la situation par la manipulation	
Passage du matériel à une représentation en 2D	
Passage de la schématisation à une écriture avec des symboles mathématiques	

Suite à l'analyse de cette première séance, la constellation choisit de ne donner aux élèves que des cubes emboitables. Lors de la mise en commun, les enseignants proposent de raconter le problème à partir du schéma des élèves. Cela les amène à modifier la consigne de départ :
« Paul a 6 billes jaunes. Il gagne 8 billes rouges. Combien a-t-il de billes (bleu) en tout ? Je ne veux pas la réponse tout de suite. On veut pouvoir comprendre l'histoire. Vous devrez donc être capable d'expliquer l'histoire, comment vous avez fait. ».

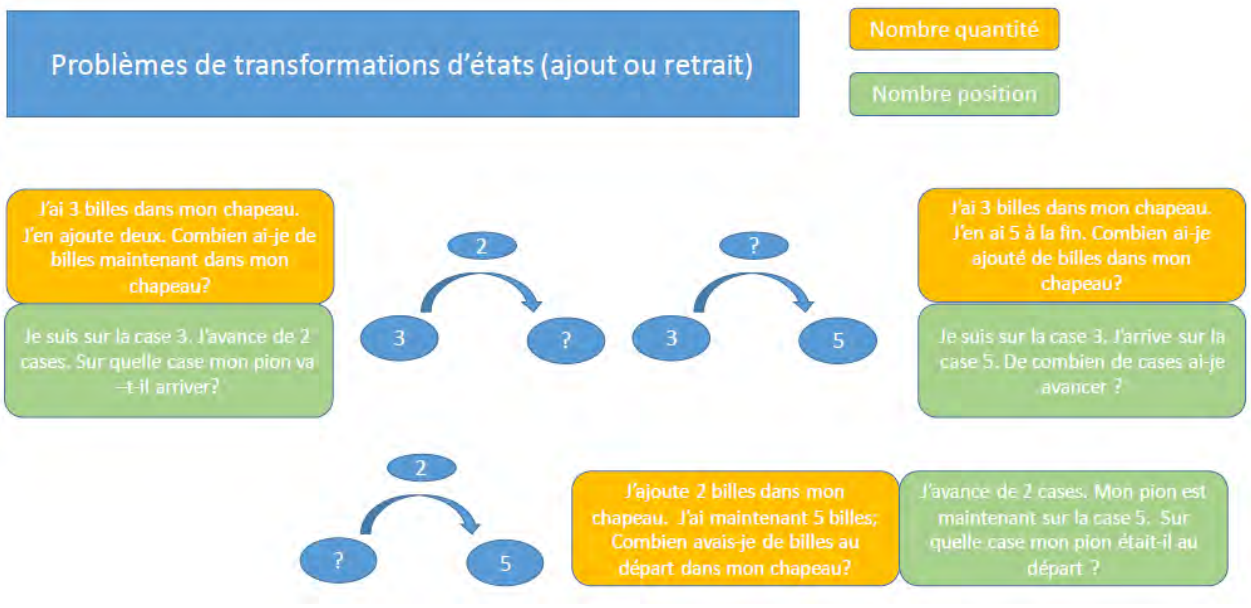


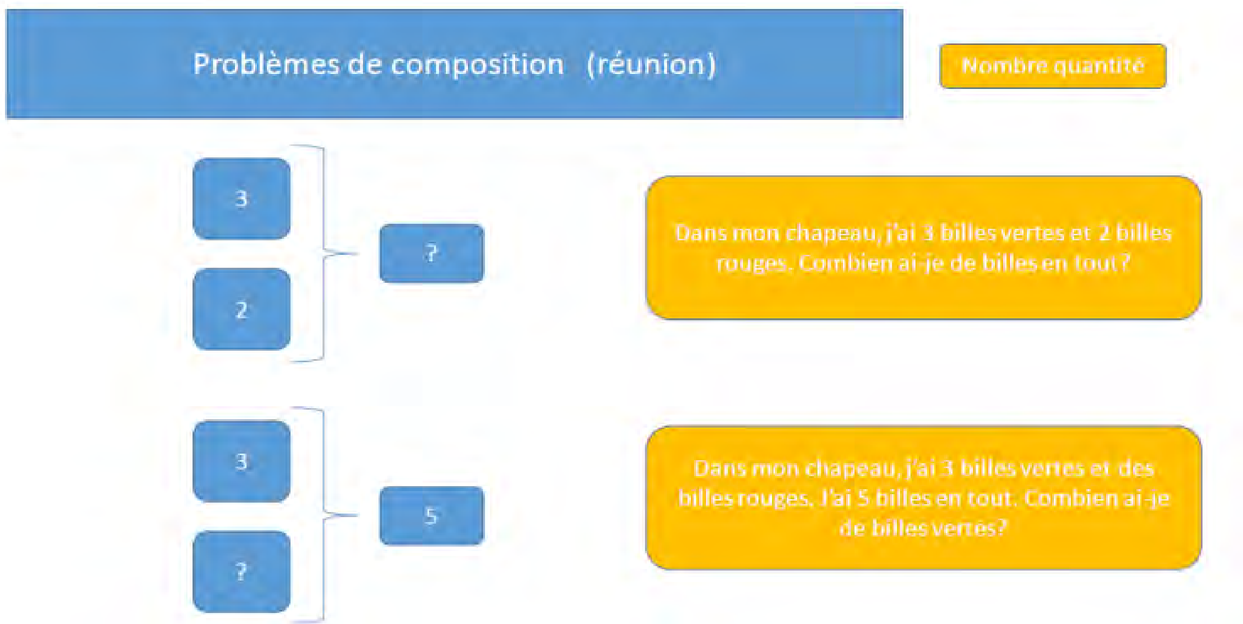


Les élèves sont invités à modéliser la situation avec plusieurs couleurs pour matérialiser les parties et le tout.

Quels types de problèmes ?

En maternelle





L'objectif pour le professeur n'est pas d'enseigner une typologie de problèmes mais plutôt d'aider les élèves à modéliser en utilisant des schémas, des nombres, des opérations pour résoudre ces problèmes. Toutefois, la classification de Vergnaud est un outil permettant aux enseignants de planifier sur le parcours de l'élève la rencontre avec les différentes catégories de problèmes.

En cycles 2 et 3 (proposition de classification d'Olivier Rivière – Inspé Chamalières)

Types de problèmes d'après la classification de Gérard Vergnaud	Exemples de problèmes	CP	CE1	CE2	CM1	CM2
Problèmes de transformation (ajout et retrait) Elément recherché : état final	(ajout) Il y a 13 pommes dans la corbeille de fruits, on rajoute 8 pommes. Combien y en a-t-il maintenant ? (retrait) Il y a 21 pommes dans la corbeille de fruits, on enlève 8 pommes. Combien y en a-t-il maintenant ?					
Problèmes de transformation (ajout et retrait) Elément recherché : transformation.	(ajout) Il y avait 13 pommes dans la corbeille de fruits, on en a rajouté et maintenant il y en a 21. Combien en a-t-on rajouté ? (retrait) Il y avait 21 pommes dans la corbeille de fruits, on en a enlevé et maintenant il y en a 13. Combien en a-t-on enlevé ?					
Problèmes de transformation (ajout ou retrait) Elément recherché : état initial	(ajout) On ajoute 8 pommes dans la corbeille de fruits, il y en a maintenant 21. Combien de pommes y en avait-il avant qu'on en rajoute ? (retrait) On retire 8 pommes dans la corbeille de fruits, il y en a maintenant 13. Combien de pommes y avait-il avant qu'on en enlève ?					
Problèmes de composition de deux états Elément recherché : le composé = le tout	Il y a 13 pommes et 8 poires dans la corbeille de fruits. Combien cela fait-il de fruits ?					
Problèmes de composition de deux états Elément recherché : un état = une partie	Il y a des pommes et des poires dans la corbeille de fruits. Il y a 21 fruits en tout, dont 13 pommes. Combien y a-t-il de poires ?					
Problèmes de comparaison d'états (comparaison positive ou négative) Elément recherché : un des états (recherche de l'état à comparer/2ème état)	(positive) Léo a 3 billes. Juliette a 5 billes de plus que lui. Combien de billes Juliette a–t–elle? (négative) Léo a 9 billes. Juliette a 5 billes de moins que lui. Combien de billes Juliette a–t–elle?					
Problèmes de comparaison d'états (comparaison positive ou négative Elément recherché : comparaison positive ou négative	(positive) Léo a 3 billes. Juliette en a 9. Combien de billes Juliette a–t–elle de plus que Léo ? (négative) Léo a 8 billes. Juliette en a 6. Combien de billes Juliette a–t–elle de moins que Léo ?-					
Problèmes de comparaison d'états (comparaison positive ou négative) Elément recherché : un des états (recherche de l'état comparé)	(positive) Léo a 9 billes. Il en a 7 de plus que Juliette. Combien de billes Juliette a–t–elle? (négative) Léo a 9 billes. Il en a 5 de moins que Juliette. Combien de billes Juliette a–t–elle? -					
Problèmes de composition de transformations Elément recherché : la transformation résultante	Alain joue aux billes. Lors de la première partie, il en gagne 7. Lors de la deuxième partie il en perd 12. A l'issue des deux parties, en a-t-il gagné ou perdu?					
Problèmes de composition de transformations Elément recherché : une des transformations	Alain a joué deux parties de billes. Lors de la première partie, il en a gagné 7. Au total, il en a perdu 5. Que s'est-il passé lors de la deuxième partie ? - Alain a joué deux parties de billes. Lors de la deuxième partie, il en a perdu 12. Au total, il en a perdu 5. Que s'est-il passé lors de la première partie ?					
Comparaison multiplicative (« fois plus ou fois moins ») On recherche le résultat de la comparaison multiplicative / On recherche le référé	Nadia a 4 cubes. Pierre a trois fois plus de cubes que Nadia. Combien de cubes Pierre a-t- il ?					
Comparaison multiplicative (« fois plus ou fois moins ») On recherche le résultat de la comparaison multiplicative / On recherche le référent	Pierre a 12 cubes. Pierre a trois fois plus de cubes que Nadia. Combien de cubes Nadia a-t-elle ?					
Comparaison multiplicative (« fois plus ou fois moins ») On recherche le rapport de la comparaison multiplicative	Pierre a 12 cubes, Nadia en a 4. Pierre a plus de cubes que Nadia. Combien de fois plus de cubes a-t -il ?					
Proportionnalité simple avec présence de l'unité - Problèmes de multiplication : On connaît la valeur de 1, et on cherche pour plusieurs.	Il me faut 4 cubes pour fabriquer une tour. Combien de cubes me faut-il pour fabriquer 3 tours de même hauteur ?					
Proportion simple avec présence de l'unité - Problèmes de division-partition : On recherche la valeur d'une part	La maîtresse a 12 jetons. Elle les distribue à 4 élèves. Chaque élève a le même nombre de jetons. Combien de jeton a chaque élève ?					
Proportion simple avec présence de l'unité - Problèmes de division-quotition : On recherche le nombre de parts	La maîtresse a 12 jetons. Elle les distribue à un groupe d'élèves. Chaque élève reçoit 3 jetons. Combien y a–t–il d'élèves ?					
Proportionnalité simple sans présence de l'unité ou « Quatrième de proportionnelle »	4 dictionnaires identiques pèsent 10kg. Combien pèseraient 14 dictionnaires ?					
Proportionnalité double : Problèmes de multiplication	Quel est le nombre de carreaux sur une feuille quadrillée de 3 carreaux sur 4 carreaux ?					
Proportionnalité double : Problèmes de division	Une feuille quadrillée de 12 carreaux a un côté de 3 carreaux. Combien de carreaux y a-t-il sur l'autre côté de la feuille ?					
Proportionnalité double : Problèmes de multiplication	Une chambre d'hôtel coûte 21€ par personne et par nuit. 92 personnes passent 12 nuits dans cet hôtel. Combien le groupe va-t-il payer ?					
Proportionnalité double - Configuration rectangulaire : Problèmes de multiplication (calculs d'aires)	Quelle est l'aire d'un champ rectangulaire de 84m sur 105m ?					
Proportionnalité double - Configuration rectangulaire : Problèmes de division (calculs d'aires)	Un rectangle de 13 m de largeur a une aire de 256m2. Quelle est sa longueur ?					
Proportionnalité double - Produit cartésien : Problèmes de multiplication	Avec 3 sortes de figures et 5 couleurs, combien peut-on réaliser de pièces différentes ?					
Proportionnalité double - Produit cartésien : Problèmes de division	Jean a 4 chemises différentes. Combien doit-il acheter de pantalons pour avoir 20 tenues différentes pour s'habiller ?					

Outils recommandés

Cubes emboitables, réglettes Cuisenaire, affichage ou recueil de problèmes de référence.

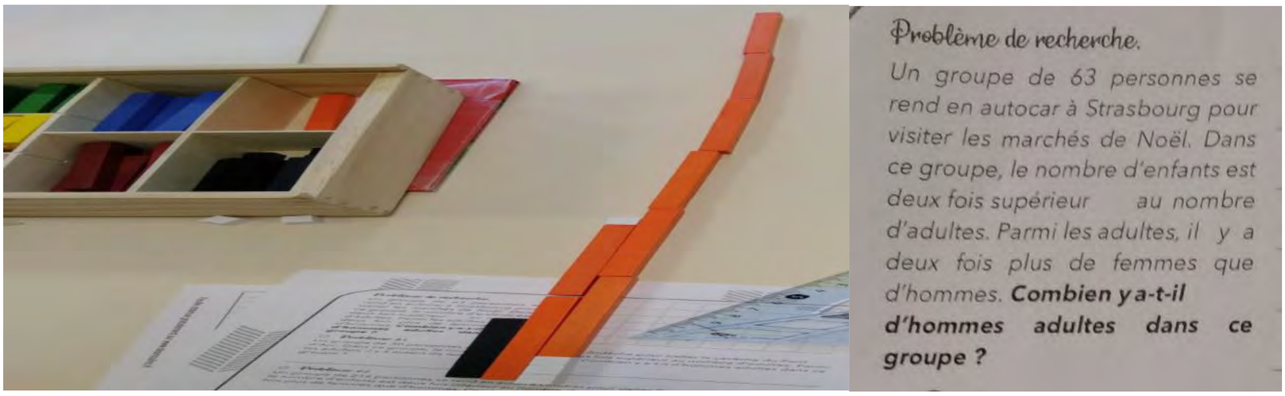
Points de vigilance

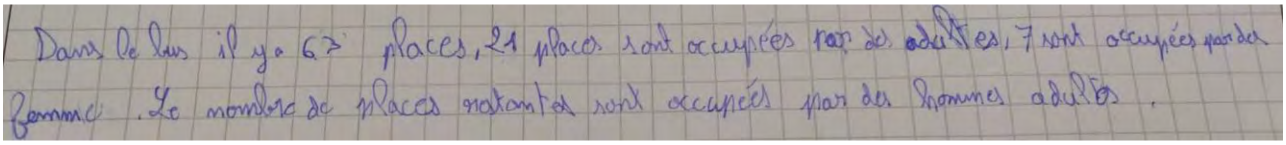
- Ne pas passer trop de temps sur la lecture et l'explicitation de l'énoncé du problème mais laisser suffisamment de temps à la résolution et à l'activité mathématique.
- Proposer une quantité de problèmes suffisamment importante aux élèves chaque semaine.
- Proposer une variété de problèmes avec des situations additives ou multiplicatives.
- Prêter attention au vocabulaire : plus / moins / chaque / autant / ajoute / différence / enlever.
- Les données inutiles augmentent la charge cognitive des élèves lors de la résolution. La tâche dévolue aux élèves doit rester celle de résoudre des problèmes et non de repérer les données utiles et inutiles.
- L'absence de connaissance des entités dont il est question dans l'énoncé du problème peut rendre impossible la régulation nécessaire lors de la phase « répondre ».
- Varier la typologie de question ou de consigne : souvent la question posée est « combien ? » mais a-t-on toujours besoin d'un point d'interrogation ? Il est possible de moduler avec un texte à compléter (« Tom a 6 billes, Léa en 3. Par rapport à Léa, Tom a … de billes de plus ») ou avec un élément à trouver dans un problème avec un support photographique (Une photo de 6 feutres est donnée devant une trousse fermée avec la consigne « J'ai 14 feutres en tout. Trouve la quantité de feutres dans ma trousse ») ou en formulant avec un verbe d'action (calculer, déterminer, trouver, etc.). Bien évidemment le lexique employé dépend du contexte et peut le rendre difficile à interpréter pour comprendre les enchaînements (« pour se figurer le film de l'histoire »). Le langage afférent peut aussi faciliter ou complexifier la compréhension de la structure mathématique sous-jacente.
- Veiller à progressivement adapter les contextes des problèmes afin de les rendre plus ou moins proches de l'environnement et de ce que connaît l'élève.
- S'interroger sur les fausses bonnes idées (« on prend les deux nombres et on les ajoute »), sur la portée des données inutiles ou encore sur la présence d'illustrations qui peut être favorable comme défavorable.
- Penser que le champ additif comporte aussi des soustractions (situations concordantes et discordantes).
- Proposer des problèmes qui permettent de s'extraire des analogies intuitives pour ne pas s'enfermer dans un seul type de problème (voir les travaux d'Emmanuel Sander). Par exemple, il s'agit de proposer des problèmes d'addition dans lesquels on ne gagne rien, mais où on ne fait que perdre (« Paul avait des billes. Il en perd 3 pendant la récréation et maintenant il lui en reste 5. Combien avait-il de billes avant la récréation ? ») mais aussi des problèmes de soustraction dans lesquels on ne perd rien, et où on ne fait que gagner (« Paul a 3 billes. Il en gagne pendant la récréation et maintenant il en a 8. Combien de billes a-t-il gagnées ? »).
- S'assurer que toutes les catégories soient traitées et que seules celles qui ont été travaillées soient évaluées.
- Interroger la nécessité de la schématisation, utile pour expliciter puis déconstruire les procédures erronées : la schématisation n'est pas imposée à tous mais permet de savoir où les élèves se trompent.

- Distinguer les phases de modélisation et de représentation, confondues dans le langage courant, comme le propose le guide orange (traduire par un dessin ou un schéma la situation, traduire mathématiquement la situation pour rendre la réalité calculable).
- S'interroger sur la progression de la résolution de problèmes : doit-on enseigner la résolution de problèmes avec le travail sur les opérations traitées, au risque d'induire l'opération utile à la résolution ? Peut–on enseigner la résolution de problème avec le calcul mental, avec la numération entière, la numération décimale ?
- Songer à créer une routine de contrôle de la vraisemblance des résultats, ce qui suggère en amont un travail sur les ordres de grandeur, les unités, la numération, etc.
- Se soucier de la trace écrite élève : l'explicitation de la consigne favorise l'écrit des enfants et l'anticipation de la phrase réponse permet aux élèves de ne pas oublier ce qui est recherché.
- Se soucier de la trace écrite de référence qui peut prendre la forme d'une affiche, d'un cahier témoin avec des RDP exemplaires voire d'un cahier de problèmes, dans lequel il est aussi possible de faire rédiger des problèmes aux élèves, etc.

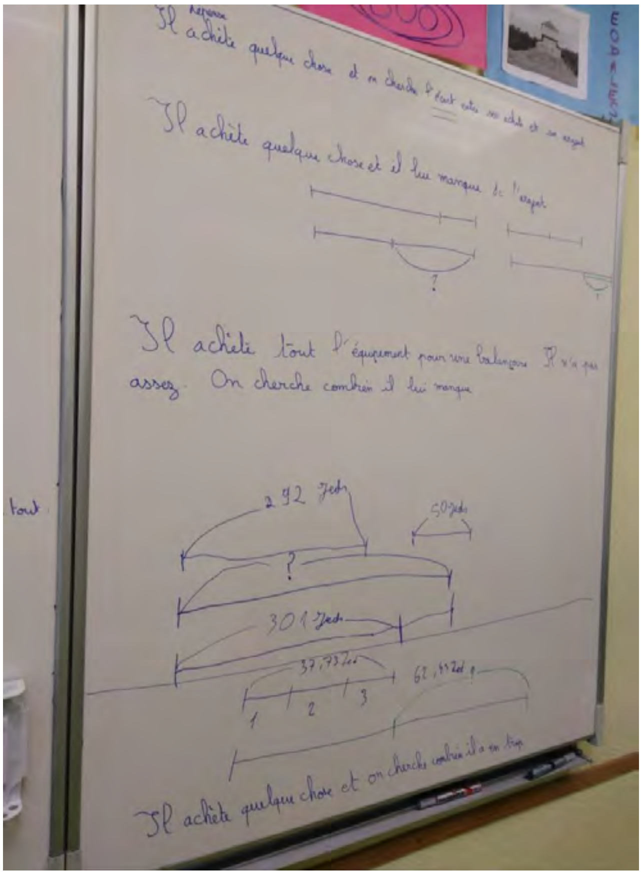
Gestes professionnels

- Expliciter ce que l'on attend des élèves (faire un calcul, écrire une phrase réponse, faire une estimation, modéliser ou schématiser, créer un problème analogue, transformer le problème, identifier la structure mathématique).
- Faire raconter le problème sans les nombres pour permettre aux élèves de se centrer sur la structure mathématique sous-jacente.
- Jouer sur les variables éloignement dans l'espace ou le temps pour proposer des situations de formulation.
- Faire verbaliser les élèves pour faire des aller-retour entre la modélisation et la situation dans l'énoncé.
- Mettre en œuvre, identifier et institutionnaliser des procédures possibles, en s'appuyant sur les interactions langagières, pour avoir des modèles de résolution auxquels les élèves peuvent se référer régulièrement en classe.
- Programmer son enseignement des différents types de problèmes (maternelle, problèmes additifs, problèmes multiplicatifs).
- Proposer des problèmes qui permettent de s'extraire des analogies intuitives (par exemple, proposer aux élèves un problème avec le vocabulaire « de plus » se résolvant par une soustraction).
- Proposer aux élèves de catégoriser des problèmes, d'inventer des problèmes du même type, etc.
- Eviter les temps de mise en commun trop longs : au moins les ¾ de la durée d'une séance de résolution de problèmes doivent être consacrés à la résolution de problèmes par les élèves. Les temps de correction et de mise en commun doivent être l'occasion de mettre en avant les éléments que les élèves doivent s'approprier et retenir.





Proposition de modélisation avec les réglettes Cuisenaire d'un problème par un groupe d'élèves de CM2 et invention d'un nouveau problème à partir de cette modélisation.



Invention de problèmes de même type que le problème de référence et catégorisation de ces problèmes (« les problèmes où on achète quelque chose et on cherche combien d'argent il manque pour cet achat ») – CM1-CM2.

Ressources pour aller plus loin

- https://eduscol.education.fr/3107/guides-fondamentaux-pour-l-enseignement
- Attendus de fin d'année CE2 : https://eduscol.education.fr/document/13960/download
- Attendus de fin d'année CM1 : https://eduscol.education.fr/document/13990/download
- Banque de problèmes : https://www.problematheque-csen.fr/
- Rendez-vous en ligne sur l'enseignement des mathématiques : https://eduscol.education.fr/3975/rendez-vous-en-ligne-sur-l-enseignement-des-mathematiques
- Fiches thématiques pour le cycle 1 https://eduscol.education.fr/document/48380/download
- https://eduscol.education.fr/document/48374/download

FICHE 2
Placer un nombre sur une droite gradué

Progression

Attendus de fin de maternelle

- Commencer à positionner les nombres les uns par rapport aux autres et à compléter une bande numérique lacunaire (les nombres en jeu sont inférieurs ou égaux à 10).
- Utiliser le nombre pour exprimer la position d'un objet ou d'une personne dans un jeu, dans une situation organisée, sur un rang ou pour comparer des positions.

Attendus de fin de cycle 2

- Nommer, lire, écrire, représenter des nombres entiers.
- Associer un nombre entier à une position sur une demi-droite graduée, ainsi qu'à la distance de ce point à l'origine.
- Graduer une demi-droite munie d'un point origine à l'aide d'une unité de longueur.

Attendus de fin de cycle 3

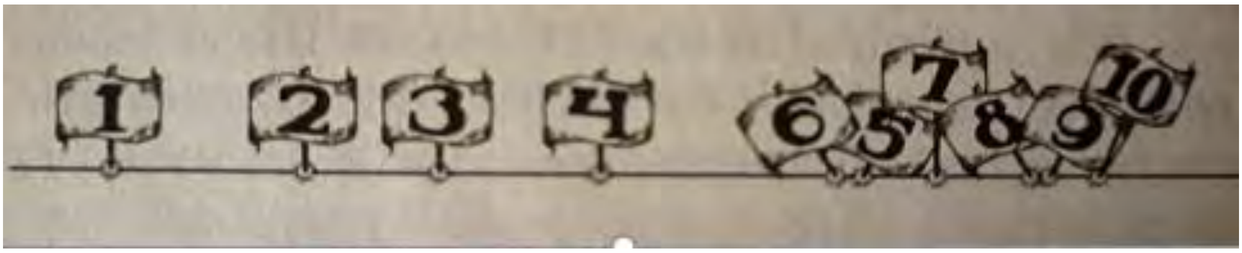
- Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux.
- Repérer et placer des fractions, nombres décimaux sur une demi-droite graduée adaptée.

Socle commun de connaissances et de compétences

- Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne (domaines 1, 2, 4).
- Produire et utiliser diverses représentations des fractions simples et des nombres décimaux (domaines 1, 5).

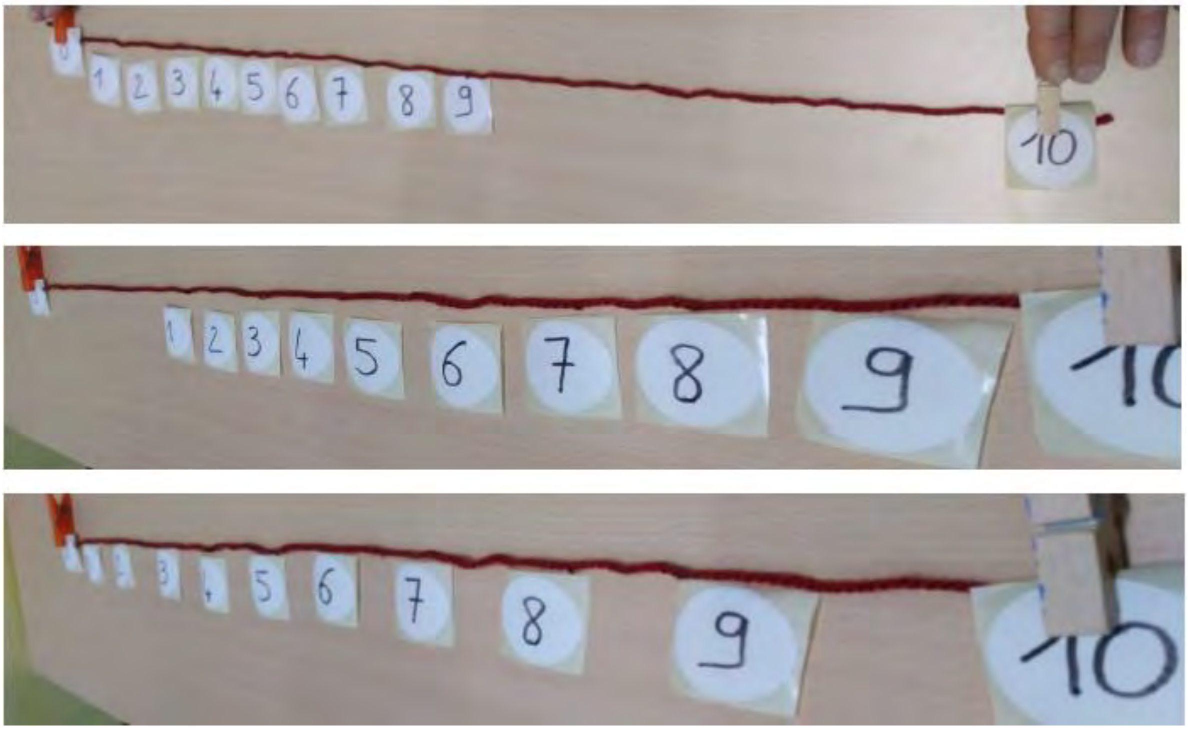
Didactique

Lien entre nombre et espace



Le théorème du parapluie ou l'art d'observer le monde dans le bon sens, Mickaël Launay.

Chez les petits, la conception des nombres n'est pas parfaite : elle est approximative, car les enfants confondent les grands nombres. Les enfants de maternelle pensent que 1 est très différent de 2 mais que 10 est très proche de 11 – plus les nombres sont grands, plus ils sont approximatifs et flous dans leur esprit. L'éducation va transformer cette idée. Une étape cruciale du développement cognitif des enfants consiste à comprendre que la ligne numérique est en réalité précise et linéaire, c'est-à-dire qu'il y a le même espace entre tous les nombres consécutifs : entre 1 et 2, 9 et 10, 99 et 100 … entre *n* et *n*+1.



Un exemple de représentation des élèves de CE1 en début d'année et de son évolution. Constellation Chamalières cycle 2, 2022.

Les nombres symboliques activent une représentation spatiale de la quantité sous la forme d'une ligne numérique mentale. Cette ligne se caractérise par une compression des grands nombres ➔ représentation logarithmique de la quantité numérique.

Progrès importants avec l'âge traduisant le passage d'une représentation logarithmique à une représentation linéaire :

- pour les nombres de 0 à 10 chez les enfants de 4 ans,
- pour les nombres de 0 à 100 chez les enfants de 6 ans,
- pour les nombres de 0 à 1000 chez les enfants entre 8 et 10 ans.

➔ L'enfant va progressivement représenter la magnitude des nombres avec le même espace entre deux nombres consécutifs.

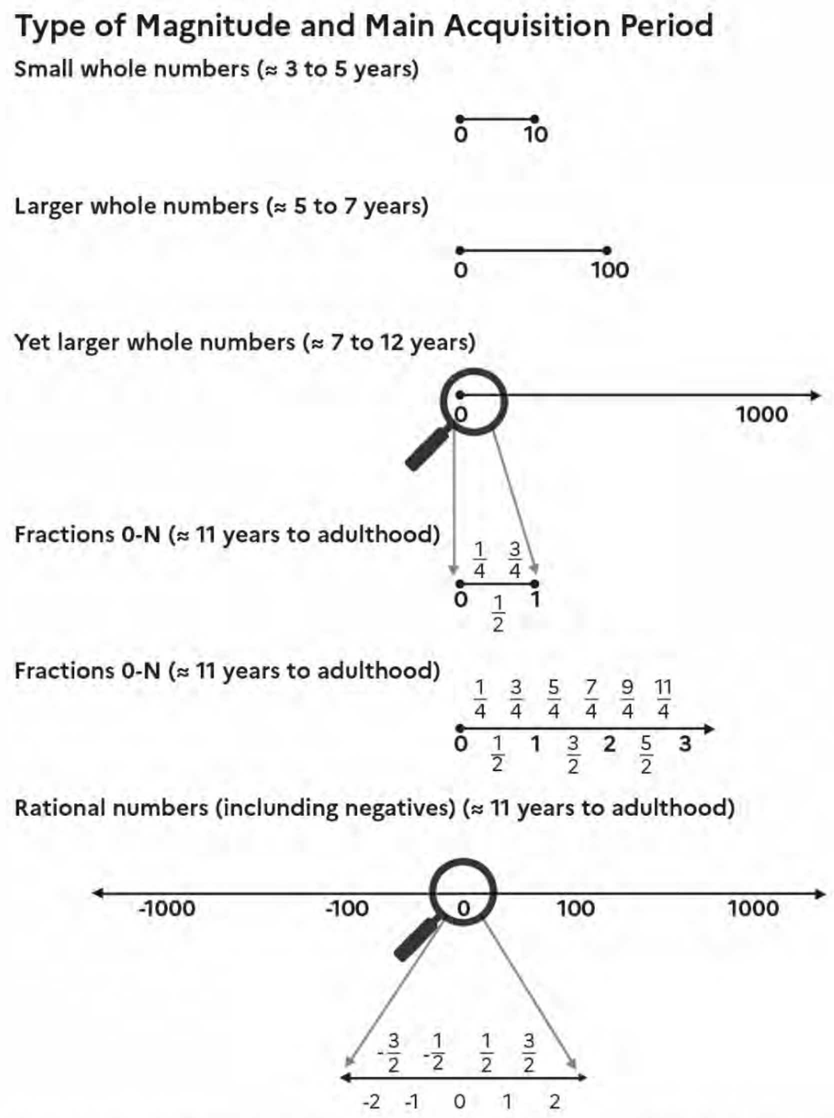


Figure 6 *A schematic diagram of the development of symbolic numerical magnitude knowledge (after Siegler & Lortie-Forgues).*

Pour développer le sens des nombres, il suffit parfois… de jouer !
On peut, par exemple, jouer à des jeux de plateau comme « les petits chevaux » ou « serpents et échelles ». De nombreuses études scientifiques montrent qu'en jetant un dé et en apprenant à bouger leur personnage d'autant de cases, les enfants modifient leur représentation mentale de la ligne numérique.
Ils comprennent que chaque nombre supplémentaire fait avancer d'une case.

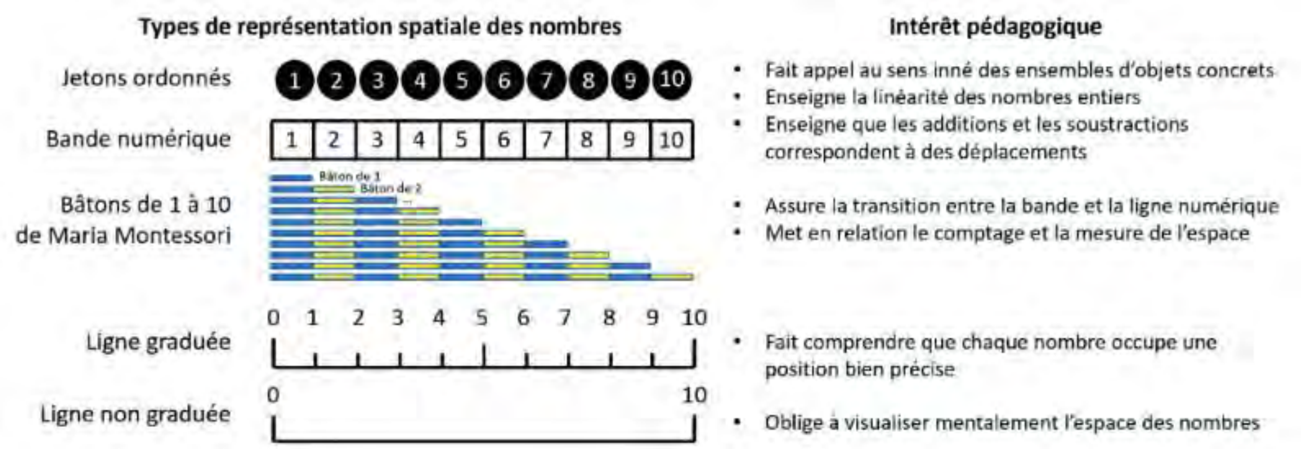
Préconisations du Conseil scientifique de l'Éducation nationale

Jouer avec des jeux de plateau dès la maternelle, afin de comprendre :

- comment les nombres s'organisent de gauche à droite,
- comment leur position permet de les comparer,
- comment l'addition et son inverse, la soustraction, correspondent à des déplacements sur cette ligne.

Introduire très tôt l'espace des nombres, selon la progression proposée ci-dessous.

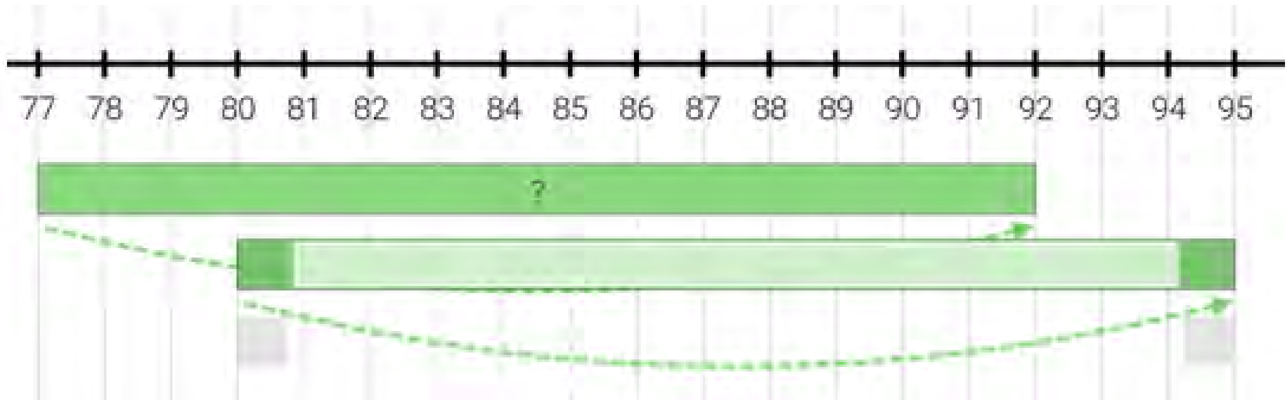
Dès la maternelle, on peut jouer à ordonner, en ligne, les premiers nombres entiers pour former une bande numérique (à l'aide d'un jeu de cartes par exemple). Plus tard, on passe à la ligne numérique, où chaque nombre occupe une position bien précise.



Nombres et espaces sont liés, depuis l'enfance et tout au long de l'éducation, note du CSEN, février 2022.

La bande numérique, puis la ligne numérique, peuvent être introduites dès la maternelle – c'est une aide pour ordonner les nombres, compter et calculer. Jouer à des jeux de plateau met rapidement en place la notion de bande numérique dès la maternelle

Un adulte n'a pas toujours conscience de l'utilisation de cette représentation spatiale pour comparer des nombres, calculer, estimer.

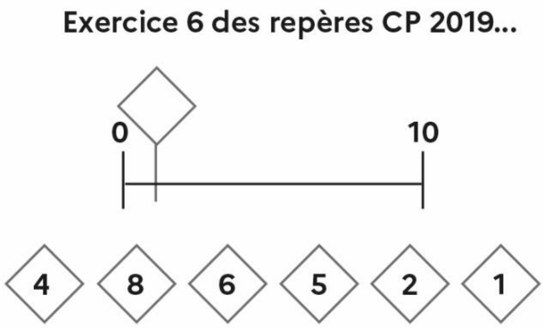


Exemple d'utilisation de l'application Number Line.

La droite numérique comme objet d'enseignement

(Conférence *Enseigner la droite numérique*, centre Alain Savary)

Cet aspect peut être traité de manière transversale dans tous les cycles. En formation, il s'agit de faire prendre conscience aux enseignants qu'ils utilisent des mots qui renvoient à une conception spatiale alors même que la droite n'a jamais été un objet d'enseignement. Pour un élève qui a seulement une conception du nombre comme quantité, dire que 36 est un nombre compris entre 30 et 40 peut lui sembler hors de propos. Le terme « entre » renvoie à une conception spatiale.



Le travail sur les ordres de grandeur est possible à partir du moment où les compétences relatives à la droite numérique ont été enseignées.

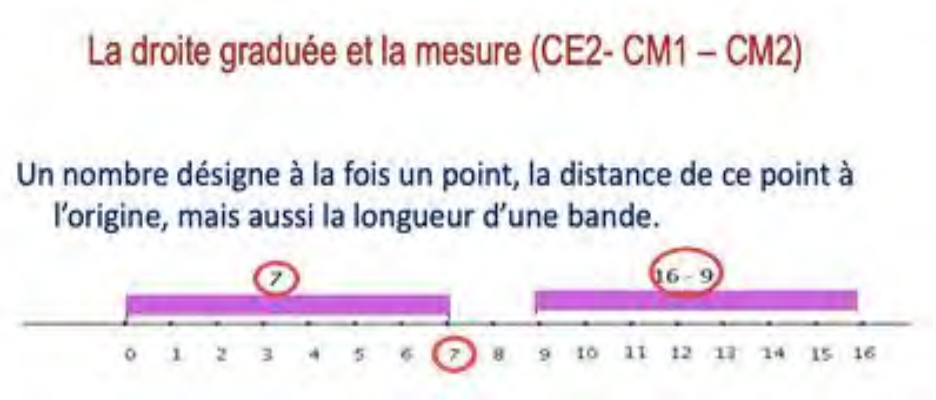
L'exercice 6 dans les évaluations CP 2019 est un exercice difficile. C'est une représentation schématique qui demande une culture de la droite numérique. Un schéma, ça s'apprend. C'est un système de lecture, avec des icônes qui nécessite un apprentissage.

Pour travailler la droite numérique, il existe de nombreuses représentations. Dans la scolarité, la graduation va permettre la conservation des distances, c'est la possibilité de faire comprendre que les longueurs deviennent des grandeurs.

Dans l'exemple ci-dessous, c'est la première fois dans la scolarité qu'un même signe désigne deux objets différents :

- le point (l'abscisse),
- la mesure algébrique (la distance de ce point à l'origine).

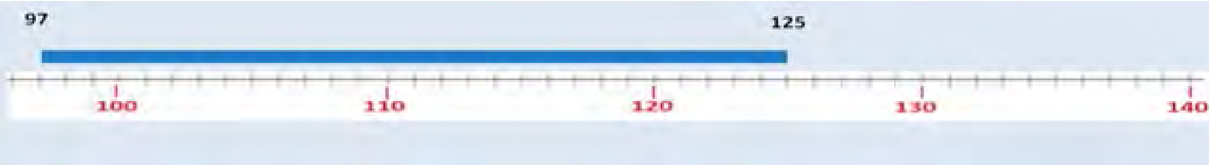
Cela peut devenir un obstacle plus tard dans la scolarité.

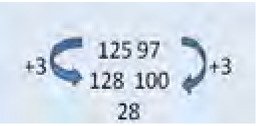


La droite numérique comme outil d'enseignement (conférence Enseigner la droite numérique, centre Alain Savary).

La droite graduée permet d'aborder les techniques de la soustraction notamment la méthode par compensation ou translation, dite « à la russe ».

Je cherche à calculer 125-97. Il faut savoir que 125-97 me donne une longueur de bande sur la droite graduée. Mais cela nécessite de l'avoir étudié auparavant. Il faut que les élèves apprennent à mesurer avec une règle graduée cassée, qui n'a pas de 0 au démarrage. Pour connaitre la longueur de cette bande, il faut chercher à faire une soustraction moins compliquée que 125-97. En faisant glisser la bande de 3, j'obtiens 128-100 = 28.





Cette méthode est un des prémices de la soustraction par le travail sur la conservation des écarts. L'enseignant aborde également la droite graduée ainsi que la notion de grandeur-longueur.

La droite graduée apporte une conception géométrique de la multiplication. La graduation avec les multiples permet de visualiser la multiplication et de comprendre que 3 x 9 c'est 3 x 8 + 1 x 3.

Pour conclure, la droite graduée a peu de place dans l'enseignement des mathématiques actuellement, excepté lors de l'enseignement des unités légales de mesure. Alors que le travail sur les unités est en fait un sous-produit du travail sur la droite graduée.
J. Briand insiste sur la nécessité d'enseigner la droite graduée en tant que telle en classe car elle met en jeu la question des mesures des longueurs mais également la numération.

Un exemple de séance pour construire et donner du sens à la représentation spatiale des nombres testée en constellation (secteur collège de Chamalières, cycle 3, 2023)

L'enseignant met à disposition des élèves plusieurs droites graduées sur lesquelles sont placées des nombres représentant des surfaces de déforestation. Le professeur ne donnera aucune indication aux élèves sur les graduations sachant que celles-ci auront été choisies de manière à ce que les différentes grandeurs à comparer soient représentées par une longueur similaire.

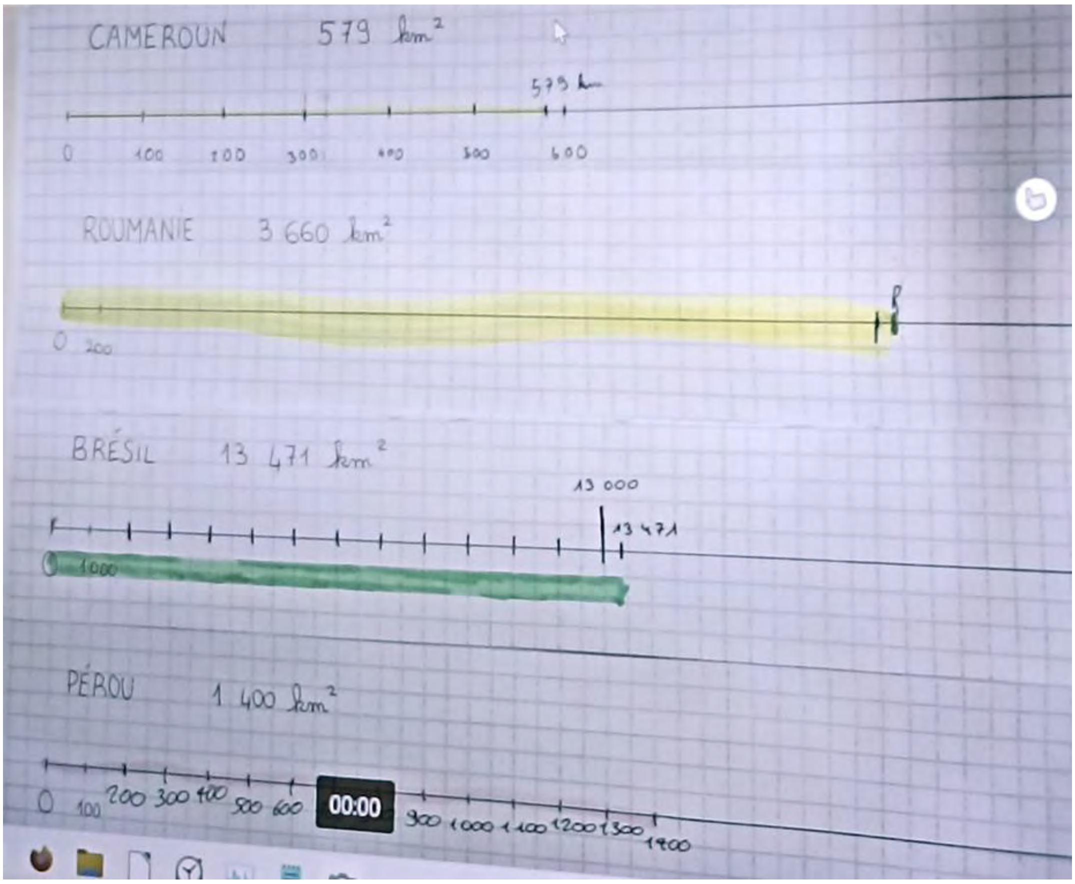
L'objectif de ce premier temps est de conduire les élèves à la nécessité de choisir une graduation commune pour pouvoir véritablement comparer les grandeurs en jeu et être critique sur les grandeurs en jeu dans des sujets d'actualité.

Brésil : 1 347 132 ha

Pérou : 140 000 ha

Roumanie : 366 000 ha

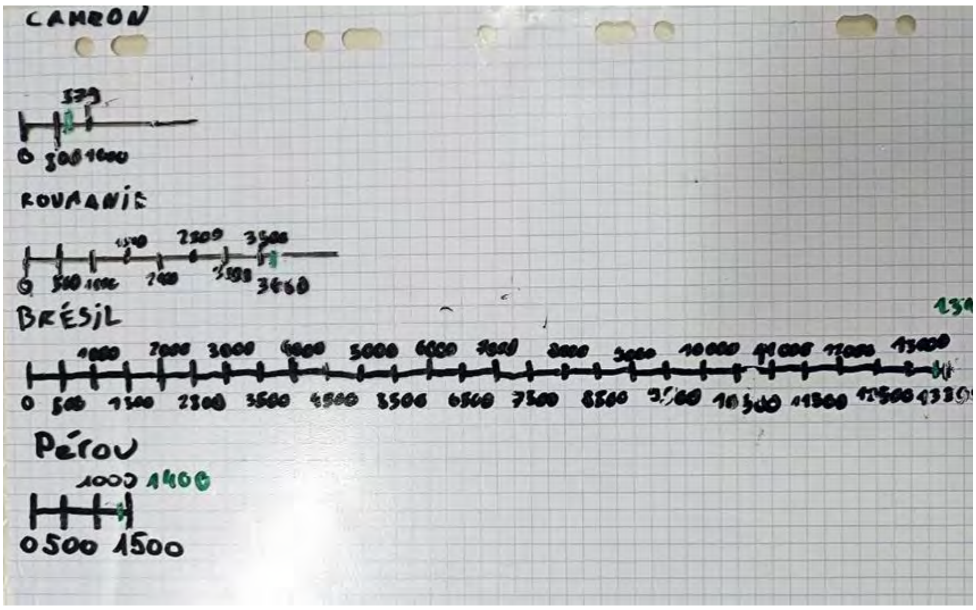
Cameroun : 57 935 ha



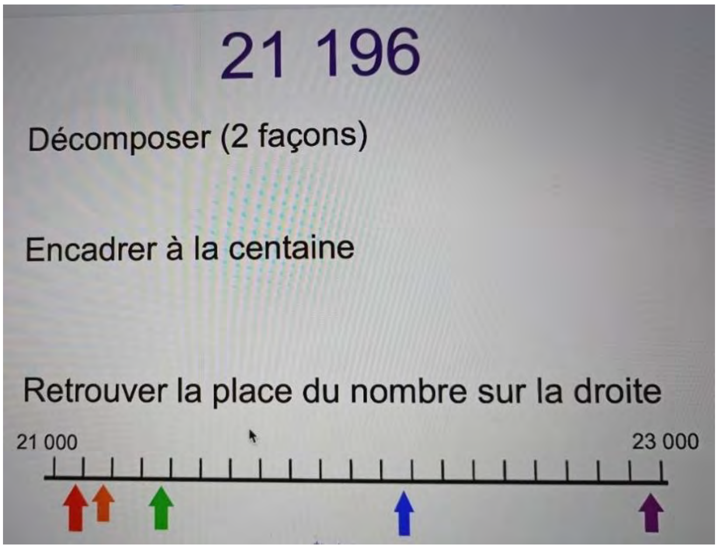
Les élèves réfléchissent à une démarche plus précise pour comparer ces grandeurs.

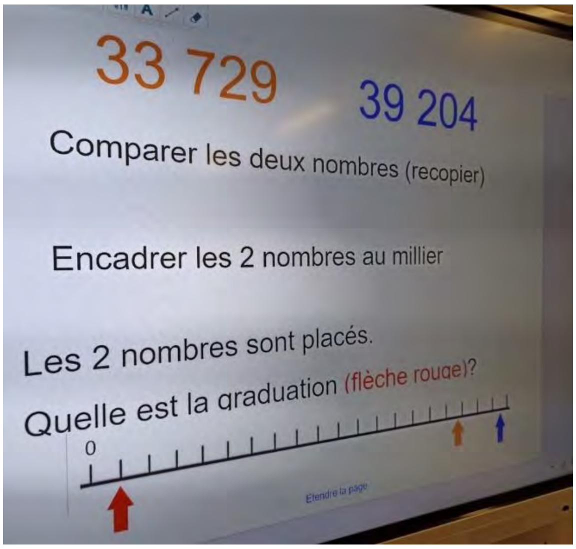
Afin de voir en quoi la représentation spatiale des nombres peut aider à estimer, donner un ordre de grandeur, l'enseignant demande aux élèves de trouver une estimation, un ordre de grandeur pour chaque nombre et invite ensuite les élèves à les représenter sur une droite graduée.

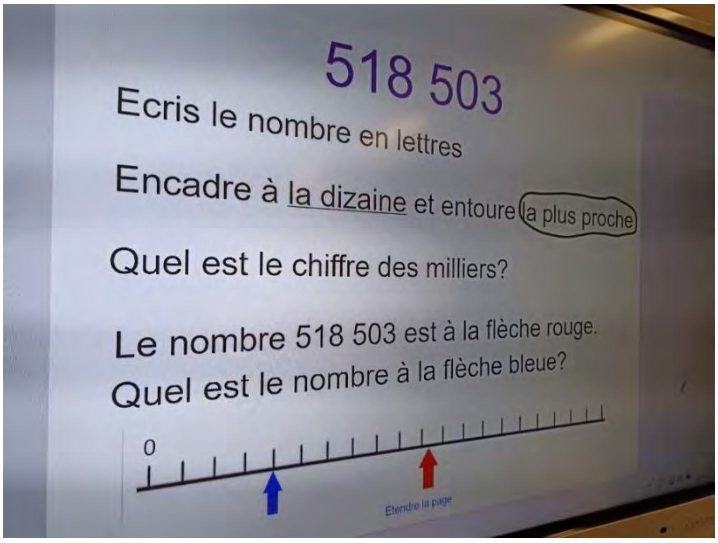
Réflexion individuelle, en groupe puis collective sur le choix de graduations permettant ou non de mieux comparer ces grandeurs.



Un exemple de rituel mathématique mis en place en CM1 CM2 pour enseigner la droite numérique suite au travail en constellation cité précédemment (Mme Butin, enseignante)







Outils recommandés

Cubes emboitables, réglettes Cuisenaire, jeux de plateau, oiseaux compteurs, Noums, applications Number Line et MICetF pour générer des droites graduées.

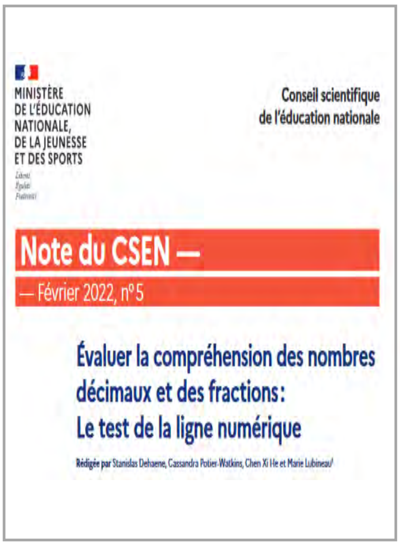
Gestes professionnels

- Varier les orientations de la bande numérique.
- Faire évoluer la bande numérique vers le fil numérique (proposition de la note du CSEN).
- Proposer des jeux de plateaux, problèmes de déplacements sur la bande numérique.
- Construire et faire évoluer la représentation spatiale des nombres.
- Utiliser la demi-droite graduée pour calculer, comparer, intercaler des nombres ou encore pour estimer.
- Permettre une représentation des grandeurs par les élèves en utilisant une droite graduée adaptée notamment pour résoudre des problèmes de la vie quotidienne et accéder à une meilleure compréhension des grandeurs en jeu dans un contexte donné.

Ressources pour aller plus loin

Nombres et espaces sont liés, depuis l'enfance et tout au long de l'éducation, note du CSEN, février 2022.

➔ https://www.reseaucanope.fr/fileadmin/user_upload/Projets/conseil_scientifique_education_nationale/Note_comprehension_nombres_decimaux_fractions_CSEN.pdf
➔ https://apps.mathlearningcenter.org/number-line/
➔ https://eduscol.education.fr/2828/oiseaux-compteurs-un-jeu-de-cartes-mathematiques-au-cp



FICHE 3
Multiplier

Progression

Attendus de fin de maternelle

- Commencer à résoudre des problèmes de composition de deux collections, d'ajout ou de retrait, de produit ou de partage (les nombres en jeu sont tous inférieurs ou égaux à 10).

Attendus de fin de cycle 2

- Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul.
- Calculer aves des nombres entiers.

Attendus de fin de cycle 3

- Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux.

Socle commun de connaissances et de compétences

- Modéliser :
  - utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne,
  - reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité.
- Représenter :
  - utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages, etc.
- Raisonner :
  - résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement.

Didactique

Conceptions intuitives de la multiplication

Les conceptions intuitives ont pour source des connaissances issues de la vie de tous les jours qui se substituent aux notions mathématiques. L'enseignant doit envisager des situations atypiques, augmenter la diversité des contextes dans lesquels une même notion mathématique est susceptible d'apparaitre.

Conception intuitive de la multiplication

Quelles conséquences ?

Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 0,22 gallon ? — **44% de réussite**
Discordant

Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 5 gallons ? — **100% de réussite**
Concordant

Avec un quintal de blé, on obtient 0,75 quintaux de farine. Quelle quantité de farine peut être obtenue avec 15 quintaux de blé ? — **77% de réussite**
Concordant

Le volume d'un quintal de gypse est de 15 cm^3. Quel est le volume de 0,75 quintaux ? — **53% de réussite**
Discordant

Bell, Swann & Taylor, 1981; Fischbein et al., 1985

Conception intuitive de la multiplication

Définition consensuelle erronée de ce qu'est une multiplication

Si on demande d'inventer un problème de multiplication, presque tout le monde introduit un **nombre entier**

Croyance erronée que **multiplier rend plus grand**

Difficulté à un inventer un problème dans lequel multiplier rend plus petit

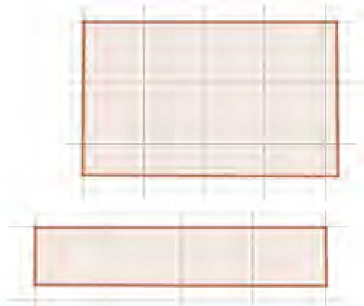
Difficulté à justifier la commutativité de la multiplication :

3x5=5x3, càd 5+5+5 = 3+3+3+3+3 ? (conséquence de l'asymétrie intuitive entre multiplicateur et du multiplicande)

La représentation en rectangles

Le rectangle est une représentation différente de l'addition itérée qui permet de faire comprendre la commutativité.

Quelques autres avantages de l'utilisation de la représentation en rectangles



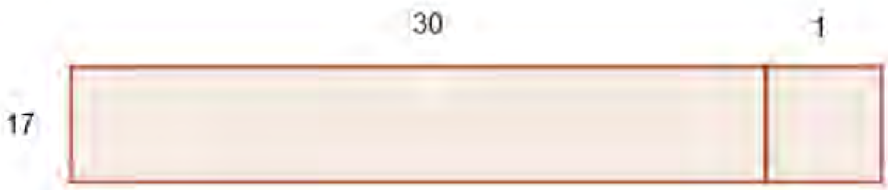
- Elle permet de représenter la multiplication des décimaux.
- Elle donne à voir que le résultat de la multiplication d'un nombre b par un nombre inférieur à 1 est inférieur à b.
- Elle permet de représenter tout nombre sous la forme d'un rectangle.

Un calcul à effectuer sous contrainte(s) successive(s)

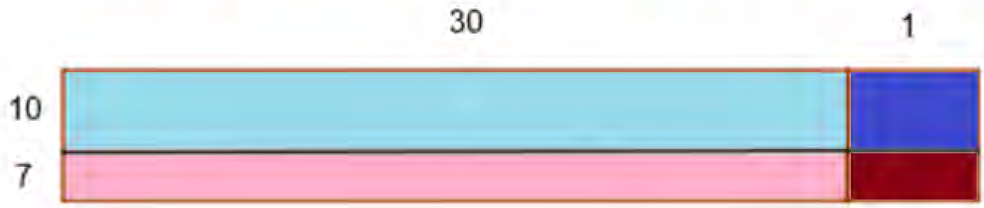
Calculer, par la méthode de votre choix, 31 x 17.

Calculer, sans instrument et sans calcul posé, 31 x 17.

$$31 \times 17 = 30 \times 17 + 1 \times 17$$



$$31 \times 17 = (30 + 1) \times (10 + 7)$$
$$= 30 \times 10 + 1 \times 10 + 30 \times 7 + 1 \times 7$$



Outre les éléments méthodologiques visant à poser un calcul aéré laissant la place aux retenues, il est important de verbaliser la gestion des retenues « 4 fois 7 unités font 28 unités, ce qui fait 2 dizaines que je mets en retenue dans la colonne des dizaines et 8 unités que j'écris dans la colonne des unités. » L'enseignant veille à expliciter la place de l'unité de référence et des différents groupement situés à gauche de celle-ci en revenant sur l'aspect positionnel du système de numération. De la même manière « 4 fois 3 dizaines font 12 dizaines, plus les dizaines que j'ai mises en retenue, cela fait 14 dizaines soit 1 centaine et 4 dizaines ». Multiplier par un nombre à plusieurs chiffres nécessite d'avoir assimilé l'utilisation de la « règle des 0 » (qui doit être préférée au principe de décalage et à laquelle il faut donner du sens en travaillant la multiplication par 10, 100, 1000 grâce au glisse-nombre par exemple, mais aussi le principe de distributivité de la multiplication sur l'addition (multiplier 37 par 14 revient à multiplier 37 par 4 puis par 10 et à additionner les deux résultats obtenus. La représentation en rectangle est une aide à la compréhension de cette propriété.

$$\begin{array}{cccc}
 & & {\scriptstyle 2} & \\
 & & 3 & 7 \\
\times & & 1 & 4 \\
\hline
 & {\scriptstyle 1} & & \\
 & 1 & 4 & 8 \\
+ & 3 & 7 & 0 \\
\hline
 & 5 & 1 & 8
\end{array}$$

Outils recommandés

Matériel de numération, cubes emboitables, glisse-nombre.

Gestes professionnels

- Verbaliser la gestion des retenues et des zéros en s'appuyant sur l'aspect décimal et positionnel de notre système de numération.
- Permettre aux élèves de construire les différents sens de la multiplication pour accéder aux propriétés de cette opération comme la commutativité.
- Travailler sur les sens de la multiplication en modélisant des situations multiplicatives avant de travailler la technique opératoire de l'opération.

Ressources pour aller plus loin

➔ https://eduscol.education.fr/document/16504/download
➔ https://eduscol.education.fr/document/13960/download
➔ https://eduscol.education.fr/document/13990/download

FICHE 4
Numération

Progression

Attendus de fin de maternelle

- Avoir compris que tout nombre s'obtient en ajoutant un au nombre précédent et que cela correspond à l'ajout d'une unité à la quantité précédente.
- Lire les nombres écrits en chiffres jusqu'à 10.
- Évaluer et comparer des collections d'objets avec des procédures numériques ou non numériques (perception immédiate, correspondance terme à terme, etc.).

Attendus de fin de cycle 2

- Comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer.
- Nommer, lire, écrire, représenter des nombres entiers.

Attendus de fin de cycle 3

- Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux.

Socle commun de connaissances et de compétences

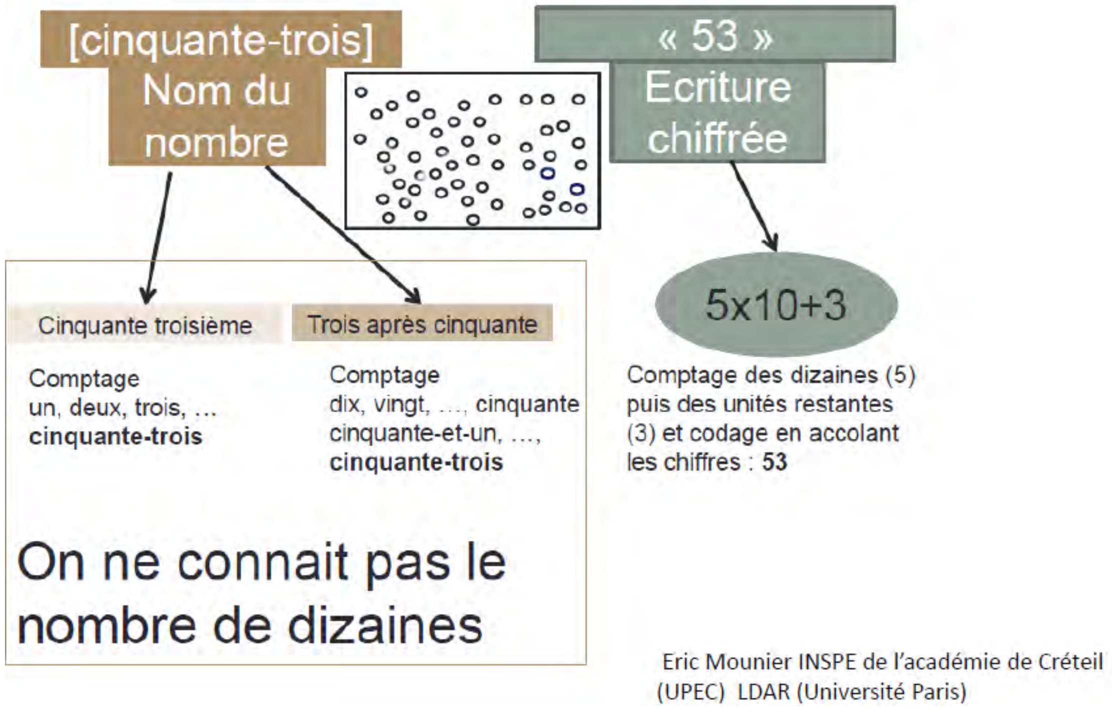
- Utiliser des nombres pour représenter des quantités ou des grandeurs (domaines 1 et 5).
- Utiliser l'oral et l'écrit, le langage naturel puis quelques représentations et quelques symboles pour expliciter des démarches, argumenter des raisonnements (domaines 1 et 3).
- Produire et utiliser diverses représentations des fractions simples et des nombres décimaux (domaines 1 et 5).

Didactique

Deux systèmes de numération

(Guide ministériel *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*)

Deux systèmes de numération sont évoqués dans les programmes officiels : d'une part les noms des nombres à l'oral qui se trouvent dans la comptine numérique en français, d'autre part les désignations écrites chiffrées des nombres qui utilisent dix chiffres.



Deux systèmes de numération objets d'enseignement au CP

Fin de maternelle:
- Nommer les nombres jusqu'à 30 sans pour autant savoir les écrire avec des chiffres

Numération orale
Nom des nombres à l'oral : comptine numérique

Numération écrite
Désignations écrites chiffrées des nombres: utilisation des 10 chiffres

NECESSITE

-d'appréhender les aspects décimaux et positionnels des écritures chiffrées → gages de la compréhension du système de numération écrit chiffré
-d'apprendre le nom des nombres en repérant la structure dans la comptine numérique

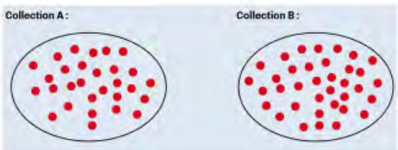
Comprendre les deux systèmes de numération conditionne les connaissances sur le calcul

Ressources de la numération orale → **calcul mental**

Ressources de la numération écrite chiffrée → **calcul posé**

Des nombres sans numération ?

4 procédures pour comparer les quantités



Procédure 1:
Correspondance terme à terme

- Barrer un élément de la collection A, puis un élément de la collection B.
- Observer dans quelle collection il reste des éléments non associés.
- Possibilité de faire correspondre des groupements identiques (p.ex. les dizaines)

⇨ Ne nécessite pas l'utilisation du nom des nombres ni de leur écriture chiffrée

Procédure 2:
Nom du nombre par comptage un à un

- Dénombrer les collections
- Comparer le nom des nombres en fonction de leur ordre d'arrivée dans la comptine numérique:

⇨ Ne nécessite pas l'utilisation de l'écriture chiffrée

Procédure 3:
Nom du nombre par comptage dix en dix

- Procédure identique à la procédure 2, mais en prenant en compte les dizaines.
- Utiliser la comptine des dizaines pour dénombrer et pour comparer.

⇨ Ne nécessite pas l'utilisation de l'écriture chiffrée

Procédure 4:
Ecriture chiffrée

- Organiser chaque collection en un maximum de dizaines
- Coder chaque collection à l'aide de l'écriture chiffrée:
- ➔ Écrire, dans l'ordre conventionnel, le chiffre indiquant le nombre de dizaines et celui indiquant le nombre d'éléments restants.
- Conclure en comparant les écritures obtenues.

⇨ Ne nécessite pas l'utilisation du nom des nombres au-delà de 10.

Le système de numération oral utilisé en France: le nom des nombres

Repérer des régularités dans la comptine numérique utilisée en France

Certains mots sont repétés

Dizaines appelées « repérants »: **vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, quatre-vingts**
Nombres de 1 à 9: repris après chaque « repérant » pour atteindre le prochain « repérant »

➔ **« soixante-dix » et « Quatre-vingt-dix » ne sont pas des repérants car ils ne sont pas répétés**

Comment enseigner la comptine numérique?
Mettre l'accent sur les régularités sans mettre en exergue le repérant dix

Mettre en jeu 2 types de comptines

La grande comptine de 1 à 19

La petite comptine de 1 à 9

Grande comptine	vingt	Petite comptine	trente	PC	quarante	PC	cinquante	PC	soixante	GC	quatre-vingts	GC	cent

Le système de numération écrit chiffré utilisé dans le monde: une écriture partagée des nombres

La numération écrite chiffrée n'est pas la version écrite de la numération orale

10 symboles : chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Principe décimal : prend en compte des unités de numération successives pour désigner un nombre ➔ 1 dizaine c'est 10 unités
Utilisation de dix pour générer les unités de numération supérieures

Principe positionnel: en partant de la droite, chaque chiffre est à référer à une unité de numération supérieure

Comprendre la dizaine comme une unité de dénombrement et un synonyme de dix

Procédure 4:
Ecriture chiffrée

- Organiser chaque collection en un maximum de dizaines
- Coder chaque collection à l'aide de l'écriture chiffrée:
- ➔ Ecrire, dans l'ordre conventionnel, le chiffre indiquant le nombre de dizaines et celui indiquant le nombre d'éléments restants.
- Conclure en comparant les écritures obtenues.

⇨ Ne nécessite pas l'utilisation du nom des nombres au-delà de 10.

En CP, il n'est pas obligatoire d'aborder l'unité de numération « centaine » (CE1) mais possible d'envisager plus de dix dizaines dans les nombres

d Le rôle des deux systèmes de numération dans l'apprentissage du nombre

Numération orale : essentiellement ordinale

= suite d'items à mémoriser → dénombrement par comptage

Principes du dénombrement:

- Dernier élément compté = le n-ième
- Le dernier mot-nombre prononcé = le n-ième objet + la quantité totale d'objets (mémoire de cette quantité)

→ le cardinal

L'aspect ordinal permet de passer à l'aspect cardinal.

Numération écrite chiffrée

= Permet d'écrire n'importe quel nombre en chiffres
→ si il y a prise de conscience de ses 3 principes:
existence des 10 symboles – principe décimal – principe positionnel

L'aspect cardinal est présent car la procédure « écriture chiffrée » permet de signifier la quantité.

⚠ Nécessité d'enseigner les deux systèmes de numération:

- Comprendre et apprendre la structure de la comptine numérique = repérants – grande et petite comptines – comptine des dizaines
- Comprendre la structure de la numération écrite chiffrée= principe positionnel – principe décimal

Maternelle et CP:

Représentations autres (constellations, doigts, unités de numération, écritures littérales → servent les premiers apprentissages numériques
MAIS = elles ne sont pas des systèmes de numération
= ne permettent pas de faire de calculs efficaces

e Apprendre et enseigner les systèmes de numération

Les essentiels pour l'enseignement des deux systèmes de numération

- Dénombrements
- Estimations de quantités
- Comparaisons de quantités

Le nombre de dizaines:

→ Dans la numération orale: ni le dénombrement 1 à 1 ni la comptine des dizaines ne donne accès au nombre de dizaines
→ Il est très explicite dans la **numération écrite chiffrée**

Deux procédures à enseigner pour mieux comprendre le lien et les différences entre les deux systèmes de numération:

→ Donnent accès à deux désignations différentes du nombre
→ Avant d'enseigner ces 2 procédures → construire les deux systèmes de numération POUR pouvoir les mobiliser de manière indépendante
→ Objectif: amener les élèves à disposer de ces deux procédures pour effectuer un dénombrement → les faire dialoguer

Procédure « NOM DU NOMBRE PAR COMPTAGE DE DIX EN DIX »

- Obtenir le nom du nombre en considérant le maximum de dizaines → utiliser la comptine des dizaines / et celle de 1 en 1
- L'utilisation de l'écriture chiffrée: n'est pas nécessaire

Procédure « ECRITURE CHIFFREE »

- Organiser la collection en un nombre maximal de dizaines
- La coder avec des chiffres
- L'utilisation du nom des nombres : n'est pas nécessaire
- Elle permet d'accéder à la réponse sans présenter l'écriture chiffrée comme une version écrite de la numération orale.

Construction de la dizaine

2. La dizaine au cœur des itinéraires d'enseignements

a Deux itinéraires d'enseignement:
La dizaine est au cœur de ces deux enseignements

Premier itinéraire: Enseigner la numération écrite chiffrée à partir de la numération orale	**Deuxième itinéraire:** Construire les deux systèmes de numération de manière indépendante ➔ POUR faire des liens ensuite
✓ Pour justifier des écritures déjà connues des élèves ✓ Avec cet itinéraire: faire évoluer les procédures de dénombrement: du comptage un à un ➔ au « nom du nombre par comptage de dix en dix » ➔ à la procédure « écriture chiffrée » (qui met en évidence le nombre de dizaines)	✓ Ecriture chiffrée: introduite comme un moyen d'indiquer à l'écrit le nombre d'éléments d'une collection ✓ Permet d'écrire des nombres dont le nom n'a pas encore été enseigné ✓ Confronter les élèves à des grandes quantités pour qu'ils n'en connaissent pas l'écriture chiffrée.

Progressivité :

▪ Champ numérique d'abord identique pour aborder les deux systèmes de numérations (les écritures chiffrées étant extraites du nom des nombres) ▪ Dès que les principes de la numération écrite chiffrée sont acquis ➔ travail des écritures chiffrées jusqu'à 100, sans attendre l'acquisition de la comptine.	▪ Champ numérique pour enseigner les deux systèmes de numération: différent dès le début ▪ Construction de la numération écrite chiffrée directement jusqu'à 100 (fin de P2)

Pour les 2 ➔ Apprentissage de la comptine numérique au rythme de sa structure: alternance de la Grande et de la Petite comptine

2 itinéraires ➔ qui n'offrent pas la même possibilité de faire des liens entre les deux systèmes de numération
MAIS ➔ il est pertinent de faire dialoguer, dès que possible, les deux systèmes de numération.

b La dizaine en amont des systèmes de numération

⚠ Travailler la notion de dizaine ➔ avant la construction de la numération écrite chiffrée

Premier itinéraire:	**Deuxième itinéraire:**
Extraire la dizaine des usages de la numération orale ➔ Saut conceptuel entre le fait de dénombrer et le fait de comprendre que « dix » peut être une nouvelle unité de dénombrement, lié à l'organisation des collections en groupements	L'écriture en chiffres de la quantité se fait à partir de l'organisation en dizaines (sans besoin de la nommer)

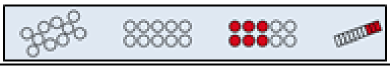
c La dizaine: comment la travailler?

Difficulté pour les élèves ➔
Percevoir « qu'une dizaine » et « dix » désignent le même nombre.

➔ Favoriser le matériel qui permet d'associer et de dissocier des éléments (p. ex. cubes emboîtables)

➔ Ne pas parler de dizaines seulement avec des objets assemblés. ➔ Ex. pour « 68 »: présenter 5 dizaines et 18 éléments restants
➔ Grâce à l'écriture chiffrée, les enfants doivent pouvoir dire qu'il y a 6 dizaines sans avoir besoins d'organiser la collection (et **vérifier** avec le matériel)

⚠ possibilité de convoquer diverses représentations de la dizaine



Exemple de séquence d'apprentissage sur la dizaine (périodes 1 et 2) sans qu'il ne soit nécessaire de mobiliser le comptage

Tâche: Jeu de comparaison de deux quantités « proches »

Matériel: jetons manipulables aimantés de deux couleurs ou dessins de collections vidéo projetées

- Présentation **rapide** de deux collections de couleurs différentes pour que les élèves n'aient pas le temps de les dénombrer par un comptage 1 à 1.
- Cacher les collections
- Indiquer la collection qui semble comporter le plus de jetons (ou autant)
- Validation: par la correspondance terme à terme: jetons un à un ou groupements de jetons

Progression

Modalité d'organisation ➔ plusieurs séances collectives et ritualisées, de courtes durées, pour chaque étape

Attendu ➔ organisation pertinente des deux collections

Règle ➔ pour que la réussite soit validée, il faut que tous les élèves aient la bonne réponse

Étape 1 : comprendre le fonctionnement du jeu: pas de difficulté à comparer Nombre de jetons inférieur à 4	**Étape 2 : groupement par cinq** 9 jetons non organisés dans chaque collection Solution adoptée collectivement: groupement par 5 (constellation du dé) Entraînement: nombre de jetons jusqu'à 9.
Étape 3 : plusieurs groupements par cinq Collections de 13 et 14 jetons ➔ organisés en groupements de cinq Solution adoptée collectivement: plusieurs groupements par cinq Entraînement: nombre de jetons jusqu'à 24.	**Étape 4 : groupement par dix** Collections de 42 et 43 jetons ➔ organisés en groupements de cinq Solution adoptée collectivement: groupements par dix (2 « cinq » accolés) Entraînement: nombre de jetons jusqu'à 99. ➔ Introduire ici le mot « dizaine »

Prolongement ➔ enseigner la procédure « **écriture chiffrée** »

C

Les unités de numération

❖ Les unités de numération servent à construire le système de numération écrit chiffré

Le nombre écrit en chiffres = codage

Codage à l'aide de chiffres ordonnés = ASPECT POSITIONNEL

Codage de l'organisation de la collection en x dizaines et x unités = ASPECT DECIMAL

❖ Une fois la numération écrite chiffrée construite

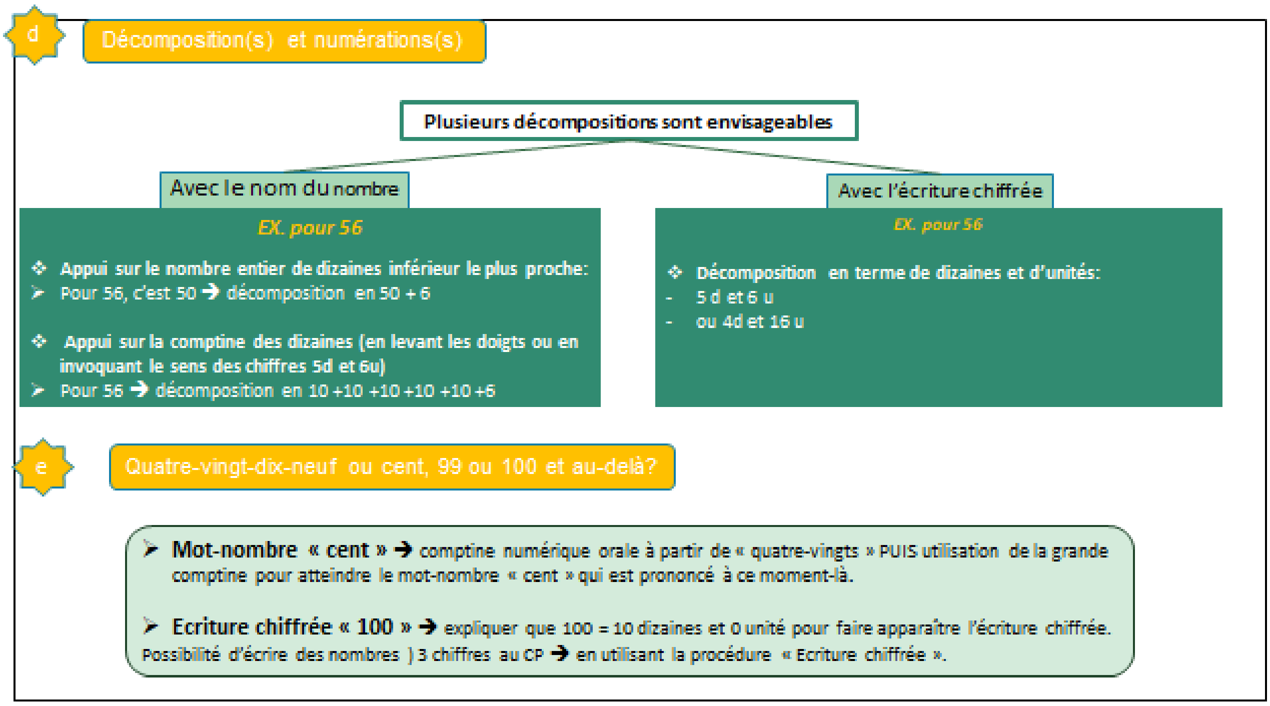
Unités de numération ➔ permettent de travailler les aspects **positionnel** et **décimal**, sans avoir à prononcer le nom du nombre

1. **D'abord** avec des collections manipulables

2. **Puis** les collections manipulables servent uniquement à valider

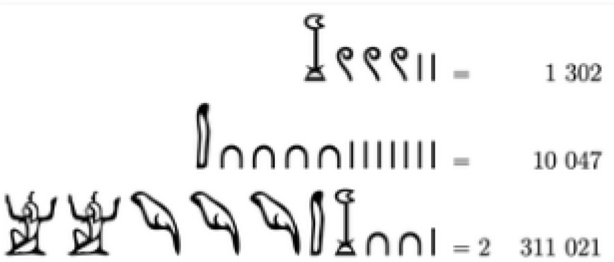
Pour travailler les aspects positionnel et décimal ➔ proposer d'écrire les nombres en chiffres en variant l'ordre des unités de numération et l'organisation des collections.

- 5 dizaines 6 unités (ni l'aspect positionnel, ni l'aspect décimal ne sont travaillés) ;
- 6 unités 5 dizaines (qui met en jeu l'aspect positionnel) ;
- 4 dizaines 16 unités (qui met en jeu l'aspect décimal) ;
- 16 unités 4 dizaines (qui met en jeu l'aspect positionnel et l'aspect décimal).



Points de vigilance

On peut amener les élèves à percevoir les caractéristiques de notre numération par comparaison du système de numération égyptien par exemple avec notre système de numération pour faire apparaitre l'aspect positionnel et le rôle du zéro.



Importance du travail sur l'aspect positionnel

4803

(4x1000) + (8x100) + (3x1)

4 000 + 800 + 3

4M 8C 3U

48C 3U

4803 U

48 plaques de 100 et 3 unités

4 cubes de 10 plaques, 8 plaques et 3 cubes

Importance du travail sur l'aspect décimal

3C 17D 27U

17D 2D 7U

19D 7U

3C 1C 9D 7U

4C 9D 7U

La numération orale peut ne venir qu'après si on veille à mettre du sens.

123 567 = 123 UM 567U

Veiller à donner du sens à la virgule comme permettant d'identifier les unités

37 ,23 : il n'est pas forcément judicieux de faire oraliser « trente-sept virgule vingt-trois » aux élèves de CM1 car la virgule donne une illusion de symétrie 3D 7U, 2di 3 ci. Il serait préférable de dire 37 unités et 23 centièmes.

3C 2D 7U 4di 3ci => nécessité de marquer les unités

32743

017

La virgule permet simplement d'identifier les unités mais on pourrait simplement entourer les unités.

Utilisation du tableau de numération

On pourrait proposer ce type de support pour l'élève plutôt que le tableau de numération :

Le tableau de numération n'est pas une nécessité mais il peut être un mode d'institutionnalisation des manipulations réalisées et de la compréhension de l'aspect positionnel de la numération.

Ne pas confondre chiffre et nombre

Le chiffre est un symbole mathématique tandis que le nombre représente une quantité, une position, une grandeur.

On cherche le nombre de dizaines de mille ou bien le nombre de dizaines de mille que l'on n'a pas pu grouper dans les centaines de mille et non pas le chiffre des centaines.

154 238 = 1CM 5DM 4UM 2C 3D 8U

= 15 DM

Il y a 15 DM et 5 DM que l'on n'a pas pu regrouper dans les centaines de mille.

Outils recommandés

Cubes emboitables, matériel de numération, bâtonnets et élastiques, trombones, bande numérique et droite graduée, tableau de numération vierge.

Gestes professionnels

- Proposer des situations problèmes amenant les élèves à construire la numération décimale de position en donnant du sens.
- Prendre en compte deux systèmes de numération qui sont conjointement enjeux d'apprentissages au cycle 2.
- Inscrire les enseignements des nombres dans une cohérence de cycle.
- Introduire les nombres sur la droite graduée en tant que position mais également comme longueur.

Ressources pour aller plus loin

➔ http://numerationdecimale.free.fr/ (F .Tempier).
➔ https://eduscol.education.fr/pid38211/attendus-et-reperes.html (Attendus de fin d'année et repères annuels de progression du CP à la 3e).
➔ http://math.univ-lyon1.fr/irem/spip.php?article596 (brochure « la sixième entre fractions et décimaux » IREM Lyon)
➔ http://ecoles.ac-rouen.fr/circvaldereuil/fichiers/bande_unite_ermel_cm1.pdf (situation des bandes Ermel CM1)

FICHE 5
Géométrie plane

Progression

Attendus de fin de maternelle

- Classer des objets en fonction de caractéristiques liées à leur forme.
- Reconnaître quelques solides (cube, pyramide, boule, cylindre).
- Savoir nommer quelques formes planes (carré, triangle, cercle ou disque, rectangle) et ce dans toutes leurs orientations et configurations.
- Reproduire un assemblage à partir d'un modèle (puzzle, pavage, assemblage de solides).
- Reproduire, dessiner des formes planes.

Attendus de fin de cycle 2

- Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, construire quelques figures géométriques.
- Reconnaître et utiliser les notions d'alignement, d'angle droit, d'égalité de longueurs, de milieu, de symétrie.

Attendus de fin de cycle 3

- Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, représenter, construire des figures.
- Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques (notions d'alignement, d'appartenance, de perpendicularité, de parallélisme, d'égalité de longueurs, d'égalité d'angle, de distance entre deux points, de symétrie, d'agrandissement et de réduction).

Socle commun de connaissances et de compétences

- Reconnaître des formes dans des objets réels et les reproduire géométriquement (domaines 1, 2 et 4).
- Utiliser diverses représentations de solides et de situations spatiales (domaines 1 et 5).
- Raisonner sur des figures pour les reproduire avec des instruments (domaines 2, 3 et 4).
- Reconnaître des situations réelles pouvant être modélisées par des relations géométriques (alignement, parallélisme, perpendicularité, symétrie).
- Utiliser des propriétés géométriques pour reconnaître des objets (domaines 1, 2, 4).
- Analyser une figure plane sous différents aspects (surface, contour de celle-ci, lignes et points).
- Reconnaître et utiliser des premiers éléments de codages d'une figure plane ou d'un solide.
- Utiliser et produire des représentations de solides et de situations spatiales (domaines 1 et 5).
- En géométrie, passer progressivement de la perception au contrôle par les instruments pour amorcer des raisonnements s'appuyant uniquement sur des propriétés des figures et sur des relations entre objets (domaines 2, 3, 4).

Didactique

À l'école primaire, la géométrie est la modélisation de l'espace physique.

Elle constitue donc un outil pour répondre à des problèmes de l'espace sensible et elle permet de créer des liens entre plusieurs disciplines : mathématiques, géographie, EPS, arts plastiques, etc. Elle apporte un ensemble de connaissances, dont du vocabulaire, des propriétés d'objets géométriques, des procédés de construction.

Elle est le lieu privilégié de l'initiation au raisonnement (expliquer, justifier, démontrer).

La géométrie euclidienne est, depuis des siècles, un outil de formation sans égal pour s'exercer à la logique et au raisonnement. Elle se fonde, en effet, sur cinq axiomes d'où découlent des théorèmes et propriétés qui serviront eux-mêmes à en construire de nouveaux ; chaque élément de l'édifice peut ainsi être démontré ».

On distingue 3 grandes rubriques : la structuration et l'orientation dans l'Espace, la géométrie dans l'Espace et la géométrie plane.

Dans ce document, ce sont les aspects de la géométrie plane qui sont plutôt explicités.

À l'école et au collège, quand on évoque la géométrie plane, on fait référence à 3 types de géométrie :

- la géométrie perceptive (qui commence en maternelle) consiste à reconnaître des objets géométriques à vue d'œil. On approche les premières figures grâce à la manipulation (au sens le plus large du terme) de formes. Les élèves font le contour de formes, tracent à main levée, utilisent des objets (morceau de bois, bord de feuille, etc.) ou des gabarits,
- la géométrie instrumentée fait appel à des instruments de géométrie (équerre, règle, compas) pour construire des figures en s'appuyant sur des propriétés connues (alignement, parallélisme, perpendicularité, longueurs égales),
- la géométrie déductive (qui prend sa place dès la fin du cycle 3) s'appuie sur des propriétés qui permettent de définir un objet géométrique. Est vrai ce qui peut être démontré.

Il y a nécessité au cycle 3 et avant d'apprendre à voir les figures, c'est-à-dire avant d'être en mesure d'analyser les propriétés des figures, de savoir décomposer une figure composée en sous-éléments et de comprendre les relations qui existent entre les différents éléments qui constituent la figure.

C'est une éducation au changement de regard qui permet de passer de la perception à l'analyse. Dans un article de Grand N (Duval et Godin, 2005), les membres de l'équipe de l'IUFM du Nord-Pas-de-Calais des années 2000 ont explicité et illustré sur des exemples la déconstruction dimensionnelle nécessaire pour acquérir une mobilité du regard permettant d'envisager une même figure de géométrie selon deux visions radicalement différentes, et très difficilement simultanées :

- soit comme assemblage de parties ou surfaces, éventuellement matérielles, agencées selon une certaine organisation spatiale,
- soit comme assemblage de lignes et de points vérifiant certaines propriétés, et de passer d'une vision à l'autre selon les besoins.

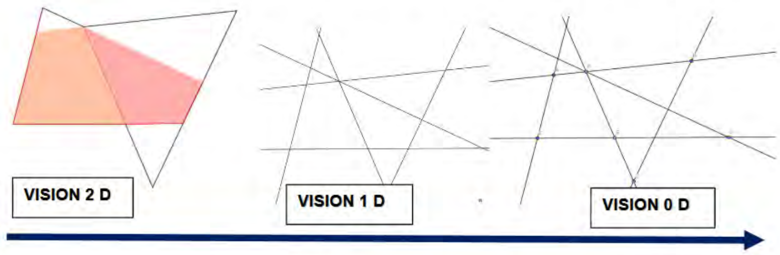
Ces travaux ont été repris, complétés notamment par le groupe « Enseigner la géométrie à l'école » de l'Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) de Clermont-Ferrand :

- la justesse des procédures mises en œuvre plutôt qu'une précision des tracés. L'observation des procédures des élèves est plus importante que la production finale. Aux cycle 2 et cycle 3, il faut utiliser les propriétés des figures qu'on peut contrôler avec des instruments,

- l'importance de la manipulation qui permet de mieux reconnaître et utiliser les propriétés spatio-géométriques des figures planes constitue un moyen de validation mathématique,
- la place essentielle accordée au langage avec mise en place d'un lexique commun développé dans les situations de communication dès le cycle 1. La verbalisation permet également à l'élève un dialogue avec soi et les autres. Elle permet la conception des choses au travers de la pensée notamment et elle justifie ce besoin de lexique commun pour se comprendre quand elle est envisagée dans une situation de communication à plusieurs.

La progression peut se penser en termes de déconstruction dimensionnelle*. Le rôle des instruments est l'une des variables didactiques facilitant cette déconstruction.

**La déconstruction dimensionnelle est un processus qui permet de passer d'une analyse visuelle des figures en termes d'assemblages de surfaces à une analyse en termes d'assemblages de lignes et de points. Cette déconstruction va à l'encontre des processus spontanés d'identification visuelle des figures.*



Il sera utile pour consolider la déconstruction dimensionnelle de construire une progression à partir des solides (3D vers 2D puis 1D et 0D). Les solides seront vus comme objets de l'espace puis comme supports pour étudier leur forme, les faces, les contours des faces.

Au cycle 1 : articulation de la vision surface/contour

Décomposer une forme en assemblage de formes juxtaposées (les gabarits permettent de transporter des informations sur des surfaces). L'articulation avec une situation de formulation permet de caractériser les figures planes par leur contour.

Puis, décomposer une forme en assemblage de formes superposées permet de percevoir des prolongements de bords, des alignements, etc.

Aux cycle 2 et cycle 3 : vision en termes de contour à une vision en termes de réseau de segments puis de points (2D -> 1D -> 0D).

Exemple d'activité : la restauration de figure (compléter une amorce).

Plusieurs variables didactiques peuvent être envisagées en fonction de l'objectif visé :

- la taille de l'amorce,
- la nature de l'amorce,
- l'orientation de l'amorce,
- les instruments à disposition.

De plus, les situations de formulation sont à faire vivre tout au long des cycles, afin de faire évoluer le langage utilisé (graphique et verbal), et tendre ainsi vers une figure codée qui a pour objectif de garder en mémoire des propriétés d'une figure, et vers un vocabulaire commun.

Outils recommandés

Formes transparentes, polydrons, solides, gabarits, règles non graduées, équerres non graduées, équerres, règles, compas, miroirs, géoplans, pentaminos.

Points de vigilance

Le vocabulaire

Du point de vue du vocabulaire et des notations, les exigences évoluent : un langage spécifique est à utiliser en situation : point, droite, demi-droite, segment, polygone, côté, angle, carré, rectangle, losange, parallélogramme, cercle, rayon, diamètre, milieu, médiatrice, hauteur, droites parallèles, droites perpendiculaires, etc. Les notations de droites, demi-droites, segments, longueurs, angles, etc., les notations représentant le parallélisme (//) ou la perpendicularité (⊥), l'utilisation du symbole « égal = », comme par exemple ABC = 32° ou AB = CD, sont des éléments constitutifs d'un langage spécifique que les élèves doivent progressivement maîtriser.

Les différents codages de figures sont d'autres éléments du langage mathématique intégré au domaine 1 du socle. Ce vocabulaire et ces notations sont introduits au fur et à mesure de leur usage et non au départ d'un apprentissage. Une attention particulière sera portée lorsqu'on différenciera le disque et le cercle et qu'on définira ce dernier (bord du disque, ligne de courbure constante, ligne équidistante du centre et ensemble de points à la même distance du centre).

En fin de cycle 3, la distinction carré/rectangle n'est plus marquée pour faire apparaître le carré comme un rectangle particulier. On sera donc vigilant à ne pas valider « le carré n'est pas un rectangle ».

Les savoirs mis en jeu dans les problèmes sont souvent implicites. Même s'ils semblent élémentaires, ils font souvent défaut aux élèves de collège dans le traitement des problèmes de géométrie.
En voici un résumé non exhaustif issu de l'article « Géométrie plane et figures au cycle 3, une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie » (IUFM Nord Pas de Calais) :

- un point est défini par l'intersection de deux droites,
- par un point donné, il passe autant de droites que l'on veut,
- par deux points distincts, il passe une droite et une seule,
- trois points alignés sont trois points qui appartiennent à une même droite,
- des points alignés sont des points qui appartiennent à une même droite,
- on peut toujours prolonger un segment,
- un segment a pour support une droite,
- un triangle est défini par la donnée de ses trois sommets, c'est-à-dire par trois points non alignés,
- un quadrilatère est défini par la donnée de ses quatre sommets,
- quand on a un quadrilatère, on a quatre droites apparentes : les supports des côtés plus deux autres qu'on peut tracer : les supports des diagonales.

Les supports

Les supports d'étude sont similaires (mêmes solides/figures planes), mais ces objets ont un statut différent tout au long de la scolarité.

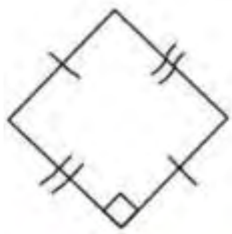
L'objectif des reproductions de figures sur quadrillage est de travailler le champ de la structuration et repérage dans l'espace et non les propriétés géométriques des figures.

Le travail sur l'alignement est important et doit être abordé sur tous les cycles. Ce n'est pas seulement « relier deux points », mais plusieurs types d'alignement sont en jeu : l'alignement d'un point et d'un segment, de trois points, l'appartenance d'un point à une droite, etc.

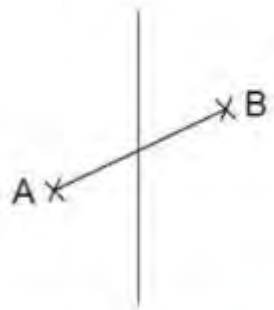
Il faut distinguer deux critères d'observation de la part de l'enseignant face aux travaux des élèves : justesse des procédures mises en œuvre et précision des tracés. Il est donc nécessaire de prévoir un temps d'apprentissage pour utiliser le matériel. Mais faire de la géométrie ne se limite pas à cela et l'enseignant doit veiller lors des résolutions de problèmes géométriques à observer les procédures des élèves.

L'institutionnalisation

L'institutionnalisation arrive après de nombreux travaux et écrits intermédiaires produits par les élèves et n'est pas un préalable au travail mené en géométrie.



C'est un losange



La médiatrice du segement [AB]

Lors de cette phase d'institutionnalisation et dès le cycle 1, l'enseignant doit veiller à ce que les figures ne soient pas systématiquement placées dans des configurations « prototypiques ». En effet, ces configurations conduisent ensuite à des conceptions erronées et à des réponses fausses, comme dans les exemples ci-dessus (doc Éduscol « espace et géométrie au cycle 3 – l'institutionnalisation en géométrie – »).

Les logiciels de géométrie dynamique

L'utilisation de logiciels de géométrie dynamique est intéressante. Elle permet de travailler sur les propriétés des figures et facilite la compréhension de certaines représentations. Elle permet aussi de familiariser les élèves à un outil qu'ils utiliseront au cycle 4 dans le cadre de la résolution de problèmes. Cependant, la manipulation physique des outils de construction est essentielle et ne doit pas être négligée, elle est au cœur des apprentissages en géométrie au cycle 3.

Focus sur la symétrie et les angles

La symétrie

Au cycle 2, le pliage de la feuille ou le papier calque est utilisé pour permettre la réalisation de la tâche. Au cycle 3, on ne les utilise que pour valider une réponse ou corriger d'éventuelles erreurs.

En milieu de cycle 3, l'enseignant proposera une grande variété de situations en faisant varier : le type de quadrillage, l'orientation de l'axe, la position de la figure par rapport à l'axe, des figures de plus en plus complexes.

Les angles

Le travail sur les angles est mené en lien avec les compétences à développer dans le cadre du champ Grandeurs et mesures. À l'école élémentaire, le travail ne porte que sur la grandeur « angle », sans référence aux mesures. Le passage de la notion d'angle droit vu comme élément de surface à la relation de 2 droites perpendiculaires (1D) doit être amené de manière explicite avant la fin du cycle 2.

Les difficultés des élèves

- Difficultés liées aux représentations des objets géométriques (prégnance horizontale, verticale ou figures prototypiques : ce sont des figures « modèles » intégrées dans la mémoire à long terme). Elles sont intégrées avec des positionnements et des dimensions spécifiques qui peuvent entraîner des difficultés de reconnaissance.
  Exemple : la figure prototypique du carré est une figure dont les bords sont parallèles à la feuille. Cela peut amener une difficulté de reconnaissance de la figure quand celle-ci est présentée sur la pointe (cf. exemple avec la confusion carré/losange).
- Difficultés liées au fait que les élèves vivent essentiellement dans un monde de représentation, sans entrer dans une conceptualisation de l'objet géométrique.
- Incapacité à voir dans une figure, à y discerner les éléments possibles d'une solution : il faut être capable de focaliser son attention sur une partie de la figure plutôt qu'une autre ou d'enrichir la figure de tracés supplémentaires. Difficultés liées au repérage de figures élémentaires dans une figure complexe : l'élève a plutôt une vision de surfaces juxtaposées que superposées.
- Difficultés liées aux tâches de construction : anticiper les tracés, connaissance insuffisante des instruments (compas et report).
- Résistance à se détacher des formes et propriétés visuellement reconnues en un coup d'œil.
- Difficultés pour communiquer des instructions : défaut de vocabulaire, imprécision, confusion du vocabulaire (parallèle, perpendiculaire). Décentration difficile c'est-à-dire difficultés pour l'élève de se mettre à la place d'un autre lors de la description d'une figure.
- Difficultés concernant la reconnaissance ou le tracé d'axes de symétrie : certains élèves n'arrivent pas à mobiliser des images mentales de pliage ou de construction de symétrique. Ce manque d'anticipation empêche l'observation d'axes présents ou la possibilité d'en tracer.
- Beaucoup d'élèves s'appuient sur le théorème-élève : « un axe de symétrie d'une figure passe par le milieu de cette figure ». Le mot « milieu » utilisé par les élèves peut aussi bien signifier le milieu d'un segment, le centre d'un cercle, d'un parallélogramme, etc. Les élèves privilégient les axes verticaux ou horizontaux.
- Difficultés des élèves pour s'autoriser à modifier un dessin modèle proposé par l'enseignant (ajouter des lettres, prolonger des tracés, etc.). Les élèves « s'interdisent » de prolonger les segments, et de ce fait de « sortir » de la figure existante.

Gestes professionnels

- Proposer des situations de reproductions de figures pour faire évoluer le regard des élèves des surfaces aux lignes puis aux points.
- Jouer sur les instruments (règle informable, règle graduée, gabarit d'angle, etc.) et les contraintes (coût des instruments par exemple).
- S'appuyer sur des situations de reproduction de figures pour faire émerger de nouveaux concepts géométriques et de nouvelles définitions qui évoluent et prennent sens.
- Proposer des situations de formulation ou de validation pour aider l'élève à utiliser et s'approprier le vocabulaire géométrique et dépasser la simple utilisation de vocabulaire technique.
- Distinguer une figure symétrique de deux figures symétriques.

Exemple de conceptions du cercle qui évoluent en fonction des instruments mis à disposition et invitent les élèves à avoir différents regards sur le cercle (IREM de Clermont-Ferrand).

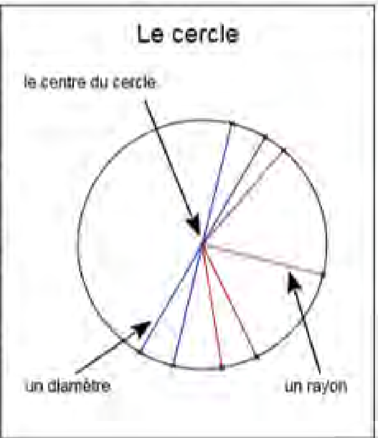
1 Le cercle est le contour d'un disque.

2 Le cercle est une ligne de courbure constante (la courbure de la ligne est toujours pareille).

3 Le cercle est une ligne située toujours à la même distance d'un point. Ce point s'appelle son centre.

On appelle rayon du cercle tout segment reliant un point du cercle et son centre. La longueur de chacun de ces segments s'appelle aussi le rayon du cercle.

On appelle diamètre du cercle tout segment reliant deux points du cercle et passant par son centre. La longueur de ces segments s'appelle aussi diamètre du cercle.



Ressources pour aller plus loin

- ➔ Espace et géométrie au cycle 3, Eduscol.
- ➔ Enseigner la géométrie élémentaire, Enjeux, ruptures et continuités, Anne-Cécile MATHE, Thomas BARRIER, Marie Jeanne PERRIN- GLORIAN, 2020.
- ➔ Géométrie plane et figures au cycle 3, une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, Bachir KESKESSA, Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN, Jean-Robert DELPLACE, 2019.
- ➔ Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des maitres, Grand N, n°94 – 2014, Christine MANGIANTE-ORSOLA, Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN.
- ➔ Enjeux langagiers, situations de formulation et de validation en géométrie. Un exemple de travail autour du cercle en CE2- Grand N, 2021, p 27-57 Anne Cécile MATHE, Valérie MAILLOT et Julien RIBENNES.
- ➔ Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments, Repères IREM, 2013, 90, pp. 5-41, Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN, Anne-Cécile MATHE, Régis LECLERCQ.
- ➔ Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figures et activité des élèves, Grand N, 2014, 93, pp.13 -37, Thomas BARRIER, Christophe HACHE, Anne-Cécile MATHE.

FICHE 6
Grandeurs et mesures

Progression

Attendus de fin de maternelle

- Classer ou ranger des objets selon un critère de longueur ou de masse ou de contenance.

Attendus de fin de cycle 2

- Comparer, estimer, mesurer des longueurs, des masses, des contenances, des durées.
- Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs.
- Résoudre des problèmes impliquant des longueurs, des masses, des contenances, des durées, des prix.

Attendus de fin de cycle 3

- Décrire un échantillon de matière à l'aide du vocabulaire scientifique et des grandeurs physiques : masse, volume.
- Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur (périmètre), aire, volume, angle.
- Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs.
- Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux.

Socle commun de connaissances et de compétences

- Modéliser.
  - Utiliser des outils mathématiques pour résoudre des problèmes concrets, notamment des problèmes portant sur des grandeurs et leurs mesures.
- Représenter.
  - Utiliser des nombres pour représenter des quantités ou des grandeurs.
- Raisonner
  - Résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement.

Didactique

« *L'oubli de la notion de grandeur ferme les mathématiques sur elles-mêmes. En sens inverse, l'exploration de l'univers des grandeurs constitue le point de départ de l'exploration mathématique de la diversité du monde. L'introduction mathématique au monde qui nous entoure suppose donc prise de contact et familiarisation avec l'univers des grandeurs.* » (Chevallard et Bosch, 2002)

Un objet matériel a souvent plusieurs grandeurs : une masse, un volume, différentes longueurs, etc.

Quelles grandeurs peuvent être associées à cet objet ? Son aire s'il s'agit de l'emballer avec du papier cadeau, sa masse s'il s'agit de déterminer un éventuel coût de livraison, son volume s'il s'agit d'y mettre une surprise, la longueur de ruban pour finaliser le paquet, etc.

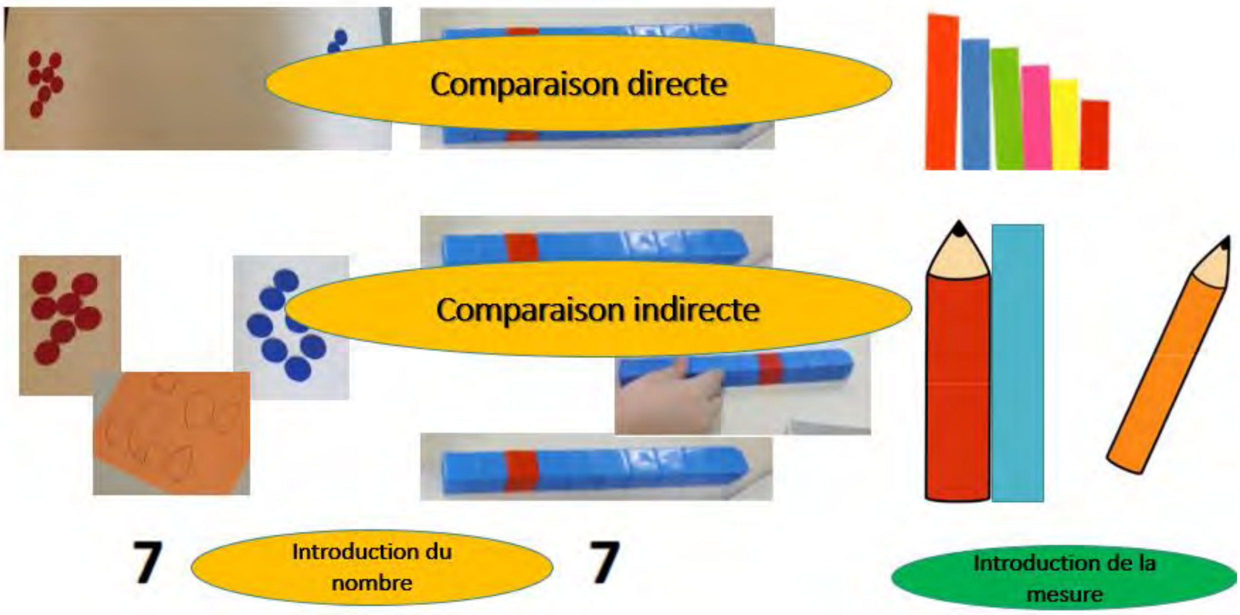
Certains objets sont plus caractéristiques que d'autres pour illustrer des grandeurs.

Il est donc important de choisir l'objet qui permettra de travailler chaque grandeur.

- Ficelle ou bande de papier étroite ou… pour la longueur. Il ne sera pas judicieux de choisir un objet ayant une « épaisseur importante » par rapport à la longueur (par exemple : la trousse).
- Une figure plane sur une feuille de papier pour l'aire.
- Un solide dont la contenance correspond approximativement au volume complet (solide + contenance) (éviter les solides dont l'épaisseur des parois est trop importante).

Il est très important de construire les grandeurs (en les comparant, les ordonnant, etc.), et lorsque les grandeurs sont bien stabilisées on peut passer à la mesure. Il faut prendre le temps de bien les construire pour garder du sens.

Le principal obstacle sur la mesure est celui du sens. Aller trop vite vers l'abstraction du nombre fait perdre le sens de la notion. C'est très sensible en cycle 3 et au collège, sur les notions d'aire et de périmètre.



Les mesures sont obligatoirement associées à des unités, ce ne sont pas des nombres abstraits. Il y a donc une réelle nécessité d'écrire les unités dans les opérations.

Travailler les grandeurs est un lien entre de nombreuses matières comme la technologie, la physique, l'histoire-géographie (instruments de mesure, ordre de grandeur, etc.).

Progression synthétique proposée par les référents mathématiques du premier et second degré de Clermont-Ferrand.

	Longueur	Masse	Contenance/Volume	Durée	Prix	Aire	Angles	Opération
Cycle 1	Observations, comparaisons directes et tris	Observations, comparaisons directes et tris	Observations, comparaisons directes et tris	Se repérer dans le temps et l'espace				
CP	Comparaisons, estimations, mesure (unité de référence puis centimètre)	Comparaison		Lire une date	Euros avec manipulation pièces et billets			
CE1	Comparaisons, estimations, mesure (unité de référence puis cm, dm , m, km	Comparaison, Mesure en kg et g	Comparaison, Mesure L	Lire une heure entière et demi h. Relation entre h/min et h/jour	Euros et centimes d'euros			Multiplier par 10
CE2	Comparaisons, estimations, mesure (unité de référence puis cm, dm , m, km et mm	Comparaison, Mesure en kg, g et tonne	Comparaison, Mesure L, cL, et dL	Relation min/s	Euros et centimes d'euros			Multiplier par 10, 100
CM1	Périmètre en comparant puis mesurant les côtés.			Siècle/ année ; année/jour ; heure/min ; min/s		comparaison et unité de référence	repérer, comparer, gabarit	Multiplier et diviser par 10 nombre décimaux
CM2	Périmètre en comparant puis mesurant les côtés. Introduction de formule (Carré et rectangle)		Comparaison, Mesure L, cL, dL et mL	Transformer des heures en jours avec reste, heure/min avec reste		cm^2 ,dm^2 etm^2 Formule, carré, rectangle, triangle rectangle	repérer, comparer, gabarit	Multiplier et diviser par 10, 100 nombre décimaux

Quantité d'une collection

Comparaison directe

- De deux objets : œil ou juxtaposition (de cubes emboitables, etc.).
- D'objets multiples : œil ou juxtaposition.

Comparaison indirecte

- De deux objets : œil ou objet intermédiaire (jetons, bâtons de glace, cubes emboitables, boite d'œufs, écrits, etc.).
- D'objets multiples : œil ou objet intermédiaire (jetons, bâtons de glace, cubes emboitables, boite d'œufs, écrits, etc.).

Mise en place du vocabulaire de la comparaison : plus que, moins que, autant que, etc.

Longueurs

Comparaison directe

- De deux objets : œil ou juxtaposition de bande de papier.
- D'objets multiples : œil ou juxtaposition.

Comparaison indirecte

- De deux objets : œil ou objet intermédiaire (ficelle, bande de papier, etc.).
- D'objets multiples : œil ou objet intermédiaire (ficelle, bande de papier, etc.) ou objet marqué (cela va dépendre du nombre à comparer).

Objet marqué : lorsqu'on a plusieurs longueurs que l'on ne peut pas juxtaposer les unes sur les autres, on peut prendre une bande supplémentaire plus grande que les autres, pour marquer la longueur des bandes (début du passage à l'écrit).
Mesurer avec une unité arbitraire par report, ou partage (utilisation du guide-âne, etc.).
Introduire les unités légales centimètre, mètre, etc.
Utiliser les instruments usuels pour mesurer.

Masses

Comparaison directe

- De deux objets : soupeser ou utiliser une balance romaine.
- D'objets multiples : soupeser ou utiliser une balance romaine (se limiter au maximum à 4 objets).

Comparaison indirecte

- De deux objets : utiliser une balance romaine et un/des objets qui permet de comparer.
- D'objets multiples : utiliser une balance romaine et un/des objets qui permet de comparer. (se limiter au maximum à 4 objets).

Mesurer avec une unité arbitraire par report : jetons, cubes, etc.
Introduire les unités légales : gramme et kilogramme, etc.
Utiliser les instruments usuels pour mesurer : balance, etc.

Aires

Comparaison directe

- De deux objets : superposition ou découpage.
- D'objets multiples : superposition ou découpage comparaison deux à deux.

Comparaison indirecte

- De deux objets : découpage d'une aire pour faire une transition.
- D'objets multiples : découpage d'une ou plusieurs aire(s) pour faire une transition, aire marquée.

Aire marquée : si le nombre est trop important, on peut faire une bande de papier qui a une aire plus grande que la plus grande aire à comparer, puis on découpe et on superpose les aires notant la longueur de la surface complétée au fur et à mesure.

Mesurer avec une unité arbitraire par report : triangle, carré, autres, etc.
Introduire les unités légales : mètre carré, centimètre carré, décimètre carré en CM2.
Remarque *:* construire la grandeur « Aire », c'est un avoir une paire de ciseau dans la tête.

Capacités

Comparaison directe

- De deux objets : on transvase le contenu du premier contenant dans le deuxième contenant.
- d'objets multiples : comparaison deux à deux, ou contenant marqué.

Comparaison indirecte

- De deux objets : on transvase le contenu du premier solide dans un contenant intermédiaire.
- D'objets multiples : contenant marqué.

Contenant marqué : on utilise un contenant transparent ayant une contenance plus grande que les autres. On remplit chaque contenant à étudier puis on transvase dans le contenant transparent et on note le niveau de l'eau.

Mesurer avec une unité arbitraire par report : verre, gobelet, etc.
Introduire les unités légales : litre, centilitre, décilitre, millilitre.
Utiliser les instruments usuels : verre doseur, etc.
Remarque : les capacités peuvent être comparées en utilisant un objet marqué, cela revient à comparer les longueurs.

Durées

Comparaison directe

- De deux objets : on commence les deux activités en même temps.
- D'objets multiples : on commence les activités en même temps.

Comparaison indirecte

- De deux objets : on marque un sablier à la fin de la première activité, on trouve une activité ayant une durée équivalente à la première activité. On peut comparer la durée d'une activité par rapport à la longueur d'une chanson connue (en maternelle).
- D'objets multiples : on choisit une chanson qui dure plus longtemps que toutes les activités et on note à quel moment (parole, refrain, etc.) s'arrête chaque activité.

Mesurer avec une unité arbitraire par report : métronome, phrase référence ou temps régulier.
Introduire les unités légales : heures, minutes, jours, etc. Attention, on utilise différentes bases (base de 10, base de 60, base de 24).
Utiliser les instruments usuels : horloge, chronomètre.

Angles

Comparaison directe

- De deux objets : œil ou juxtaposition.
- D'objets multiples : œil ou juxtaposition.

Comparaison indirecte

- De deux objets : œil, objet intermédiaire ou utilisation d'un gabarit.
- D'objets multiples : œil ou objet intermédiaire ou objet marqué (cela va dépendre du nombre à comparer).

Quand on va comparer des angles, on va se servir d'une demi-droite origine.

Pour la comparaison indirecte : on peut utiliser, une paire de ciseaux, la fausse équerre de menuisier, un trombone déplié, deux stylos, etc. Il faut varier les outils et faire en sorte d'en choisir dont la représentation des demi-droites ne sont pas toujours de la même taille : un stylo et une règle par exemple.

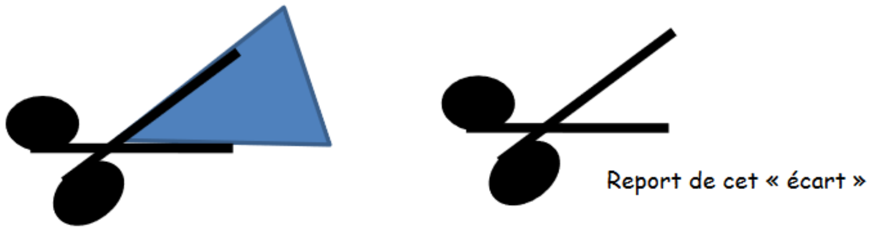


Tableau de conversion

Document d'accompagnements grandeurs et mesures cycle 2

Effectuer des changements d'unités

Au cycle 2, les élèves effectuent des changements d'unités entre les quelques unités introduites au cours du cycle pour chacune des grandeurs étudiées. Ces conversions peuvent être motivées par la résolution d'un problème, mais aussi faire l'objet d'exercices décrochés : pour permettre aux élèves de donner sens à ce travail technique on veillera à toujours rester dans des situations proches des besoins de la vie courante. Par exemple, on peut avoir besoin de convertir 3 km en m, mais plus rarement 350 km en m, et encore moins 25 km en mm !

Au cycle 2, seules quelques unités usuelles sont rencontrées par les élèves, ils n'utilisent donc pas de tableaux de conversion. Ces tableaux seront introduits au cours moyen pour institutionnaliser la suite des préfixes et au collège pour effectuer des conversions. Au cycle 2, les conversions s'appuient sur les relations connues, en utilisant éventuellement des unités intermédiaires.

> **EXEMPLE**
> Sara a un sac de briques de construction de 8 mm de hauteur, elle veut construire une tour aussi haute qu'elle avec ces pièces. Sara mesure 1 m 24 cm. Combien de briques doit-elle empiler pour réaliser sa tour ?

1 m = 100 cm, donc 1 m + 24 cm = 124 cm.
1 cm = 10 mm, donc 124 cm = 1240 mm
1240 mm ÷ 8 = 620 mm ÷ 4 = 310 mm ÷ 2 = 155 pièces

Sara va devoir empiler 155 briques.

Ou bien : (1 m 24 cm) ÷ 8 mm = 124 cm ÷ 8 mm = 1240 mm ÷ 8 mm = 155

Les conversions sont aussi travaillées tout au long du cycle dans le cadre du calcul mental, ou du calcul en ligne : 2 dm + 15 cm = 20 cm + 15 cm = 35 cm

Document d'accompagnements grandeurs et mesures cycle 3

Effectuer des changements d'unités

Au cycle 2, les élèves effectuent des changements d'unités entre les quelques unités introduites au cours du cycle pour chacune des grandeurs étudiées. Ces conversions peuvent être motivées par la résolution d'un problème, mais aussi faire l'objet d'exercices décrochés : pour permettre aux élèves de donner sens à ce travail technique on veillera à toujours rester dans des situations proches des besoins de la vie courante. Par exemple, on peut avoir besoin de convertir 3 km en m, mais plus rarement 350 km en m, et encore moins 25 km en mm !

Au cours moyen, les élèves rencontrent l'ensemble des unités de longueurs du millimètre au kilomètre, de masse du milligramme à la tonne et de contenance du millilitre à l'hectolitre. Il est important que les élèves s'approprient le sens des préfixes. Les conversions s'appuient sur les relations connues, en utilisant éventuellement des unités intermédiaires.

Exemple
Un camion laitier contient 135 hL de lait. Combien de verres de 20 cL peut-on obtenir avec le lait contenu dans ce camion ?

1 hL = 100 L, donc 135 hL = 13 500 L

1 L = 100 cL, donc 13 500 L = 1 350 000 cL

1 350 000 cL ÷ 20 cL = 67 500

On peut obtenir 67 500 verres de lait.

Ou bien : 135 hL ÷ 20 cL = 13 500 L ÷ 20 cL = 135 000 dL ÷ 2 dL = 67 500

Les tableaux des unités (ou tableaux de conversions) sont des outils efficaces pour institutionnaliser la suite des préfixes dès le cours moyen, mais les conversions s'appuyant sur les relations connues ou le sens des préfixes restent néanmoins requises, et non l'utilisation mécanique de tableaux de conversion. En sixième, l'utilisation du tableau de conversion pour effectuer des changements d'unités est rencontrée, mais elle n'est en aucun cas systématique et n'est pas la méthode privilégiée.

Les conversions sont aussi travaillées tout au long du cycle dans le cadre du calcul mental, ou du calcul en ligne :

$$2\text{ m} + 125\text{ cm} = 2\text{ m} + 1{,}25\text{ m} = 3{,}25\text{ m}$$

Les unités d'aires sont progressivement introduites tout au long du cours moyen. Les liens entre deux unités comme les cm2 et les dm2 sont explicités et justifiés tant géométriquement que par des calculs :

$1\text{ dm}^2 = 1\text{ dm} \times 1\text{ dm}$

$= 10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$

$= 10 \times 1\text{ cm} \times 10 \times 1\text{ cm}$

$= 100 \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$

$= 100 \times 1\text{ cm}^2$

$= 100\text{ cm}^2$

L'étude d'aire de terrains est l'occasion d'introduire les ares et les hectares ainsi que leurs relations : $1\text{ a} = 100\text{ m}^2 = 10\text{ m} \times 10\text{ m}$, $1\text{ ha} = 100\text{ a} = 10\,000\text{ m}^2 = 100\text{ m} \times 100\text{ m} = 1\text{ hm}^2$.

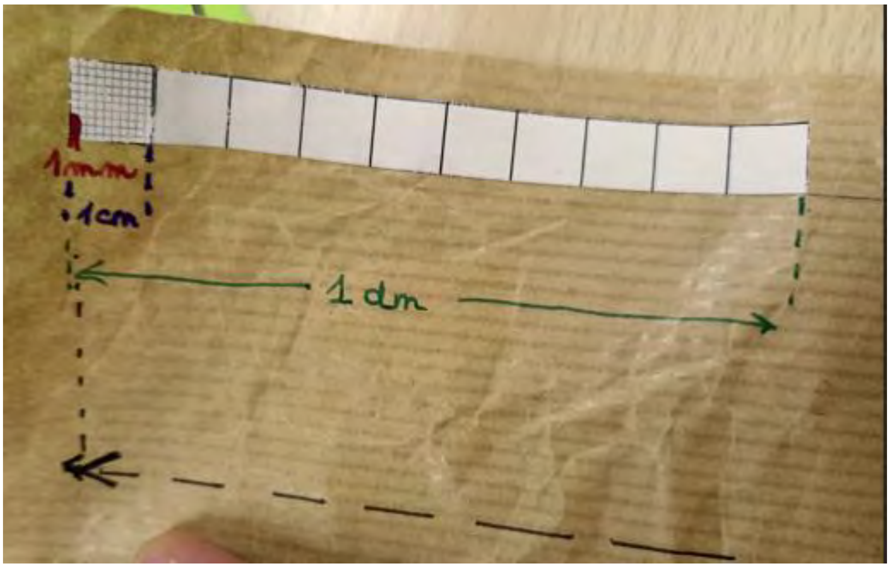
Les changements d'unités d'aire au cycle 3 sont justifiés, à chaque fois si possible, par des considérations géométriques et des liens entre les unités de longueurs.

Les quelques unités de contenance rencontrées au cycle 2 (cL, dL et L) ont permis quelques changements d'unités, ce travail se poursuit au cours moyen avec quelques unités supplémentaires (mL, daL et hL). En sixième, le travail mené en lien avec le volume du pavé droit conduit à la rencontre de nouvelles unités (cm^3, dm^3 et m^3) et à leurs relations. Le travail mené conduit également à établir puis connaître et utiliser les relations $1\text{ dm}^3 = 1\text{ L}$ et $1\text{ m}^3 = 1000\text{ L}$.

Les exemples développés dans les documents d'accompagnement préconisent l'utilisation de la méthode de substitution à l'aide de relations connues et les procédures liées à la proportionnalité.

Outils recommandés

Balances mécaniques de cuisine, balances mathématiques, balances à fléau, pesons, balles ou objets de différentes masses et différents volumes, mètres, décamètres, corde, ficelle, odomètre, éprouvettes, verres doseurs, contenants variés, équerre de menuisier.



Proposition d'outils pour les longueurs, Claire Margolinas, Inspé Clermont Auvergne.

Points de vigilance

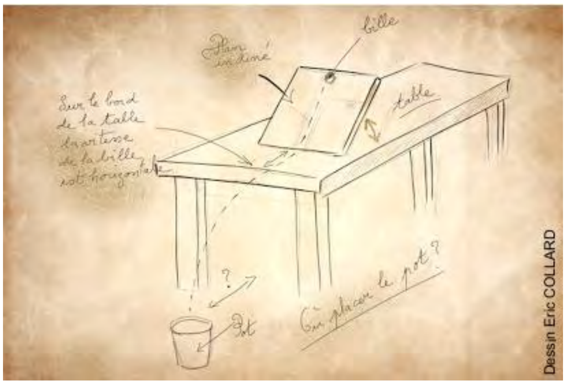
- Il faut différencier les grandeurs repérables (heure, altitude, température) et les grandeurs mesurables (longueur, aire, contenance, durée, angle, masse).
  Exemple : si on fait l'union de deux longueurs, la somme des longueurs sera la longueur de l'union. Si on fait l'union de deux températures, la somme des températures ne sera pas la température de l'union.
- La grandeur « Prix » est discutable car le même objet peut avoir un prix différent. Certains mathématiciens considèrent « Le prix » comme une grandeur et d'autres non.
- Somme des longueurs = longueurs de l'union, somme des aires = aire de l'union.
  Cette propriété n'est valide que sur les grandeurs mesurables, on fait parfois rapidement des liens avec les périmètres mais la somme des périmètres ≠ périmètre de l'union.
- Différence entre volume et capacité (capacité : ce qu'un solide peut contenir).

Difficultés des élèves

- Utilisation des outils. Quels outils pour quelles mesures ?
- Relation grandeurs, mesures et numération.
- Ordre de grandeur (résultats d'opérations et/ou représentation dans la vie courante) ?
- Lien avec le réel.
- Utiliser le décagramme.
- 3m<36cm car 3<36, les élèves se focalisent sur le nombre et non l'unité.

Gestes professionnels

- Proposer des situations permettant aux élèves de construire le concept de chacune des grandeurs avant d'introduire le nombre ou la mesure, en créant la nécessité de transporter l'information de la grandeur (ex : reproduire une expérience en replaçant les objets au même endroit pour obtenir le même résultat en gardant trace des longueurs concernées).
- Outiller les élèves pour convertir des mesures sans utiliser le tableau de conversion.
- Donner du sens aux grandeurs et aux problèmes mathématiques en confrontant les grandeurs au réel (estimation de la hauteur d'une école, estimation de longueurs d'un déplacement, etc.) ?



Défi Roule ta bille, Eric Collard, MPSA

Quels sont les phénomènes observés dans l'expérience ? Quels problèmes se posent quand on réalise les expériences ? Quels sont les facteurs qui influent sur la position du pot dans l'expérience ? Refaire le test plusieurs fois, en faisant varier certaines grandeurs (hauteurs, longueurs, types de boules (masse et volume), lieux où l'on place la bille, etc.). La boule tombe-t-elle toujours dans le pot ?

Éloigner l'expérience dans le temps ou la déplacer dans une autre classe pour amener les élèves à se questionner sur la mémorisation de l'origine, de la hauteur de la bille et de la position de la boite.

Estimation de la hauteur de l'école par rapport à la hauteur d'un élève.

Calcul d'une distance à l'aide du comptage de pas, d'une ficelle et d'un étalon, d'une vue aérienne et son échelle, etc.

Ressources pour aller plus loin

- ➔ Document d'accompagnement grandeurs et mesures cycle 2 - Éduscol
- ➔ Document d'accompagnement grandeurs et mesures cycle 3 - Éduscol

Notes

Si tu veux construire un bateau, ne rassemble pas tes hommes et femmes pour leur donner des ordres, pour expliquer chaque détail, pour leur dire où trouver chaque chose…

Si tu veux construire un bateau, fais naître dans le cœur de tes hommes et femmes le désir de la mer.

Antoine de Saint-Éxupéry